Министерство Образования Российской Федерации
Новосибирский Государственный Университет

На правах рукописи
УДК 517.98

РЯБКО ДАНИИЛ БОРИСОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НЕПРЕРЫВНОГО ПОЛИВЕРСУМА

01.01.01 - математический анализ

Диссертация

На соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук
Гутман А.Е.

Новосибирск, 2003 г.

Содержание

1 Введение

1.1 Общая характеристика работы

Актуальность темы. В последние десятилетия в математике все большую роль играют методы булевозначного анализа. Это объясняется, в частности, тем, что они находят широкое применение в исследовании таких классических объектов, как K-пространства и векторные решетки.

Использование методов булевозначного анализа, возникновение которого связано со знаменитыми работами П. Дж. Коэна по проблеме континуума, уже привело к возникновению новых идей в таких областях математики как теория алгебр фон Неймана, выпуклый анализ, теория векторных мер, теория векторных решеток и K-пространств.

Особенно возрос интерес к булевозначному анализу в связи с выходом (одновременно на русском и английском языках) книг серии «Нестандартные методы анализа», издающейся под редакцией С.С. Кутателадзе.

Роль булевозначного анализа в развитии современного функционального анализа в основном определяется тем, что он позволяет упрощать многие математические объекты рассматривая их в специальных моделях теории множеств. Так, теорема Гордона утверждает, что произвольное расширенное K-пространство является интерпретацией поля вещественных чисел подходящей булевозначной модели, а реализационная теорема Кусраева дает булевозначное представление архимедовых векторных решеток.

Новый этап в развитии этого направления был начат А.Е. Гутманом и Г.А. Лосенковым, предложившими представление произвольного булевозначного универсума в виде непрерывного расслоения (так называемого поливерсума), слоями которого являются классические модели теории множеств. При этом булевозначный универсум представляется в виде класса непрерывных сечений поливерсума — непрерывных функций, сопоставляющих каждой точке компакта Q элемент соответствующего слоя. Таким образом, исследователи в области функционального анализа могут иметь дело не с абстрактным булевозначным универсумом, а с его функциональным аналогом — моделью, элементами которой являются непрерывные функции, а основные операции вычисляются поточечно.

Такое функциональное представление подсказывает идею представления объектов исследования булевозначного анализа, таких как расширенные K-пространства, и, более общо, векторные решетки, в виде расслоений. Это позволило бы свести изучение данных объектов к изучению их «поточечных» свойств, действительно упрощая работу исследователя с этими объектами. Поэтому важной является задача нахождения представления векторных решеток в виде расслоений (подрасслоений непрерывного поливерсума) и исследование вопроса, какие свойства этих объектов имеют поточечные аналоги.

На современном этапе развития булевозначного анализа в нем все большую роль играют методы, использующие идеи и понятия другого направления нестандартного анализа — инфинитезимального. Идейные основы инфинитезимального анализа принято ассоциировать с именами Лейбница и Эйлера, однако формальные основания он получил только в середине XX века благодаря А. Робинсону, сделавшему, в частности, бесконечно большие и бесконечно малые величины строгими математическими понятиями. Бурное развитие инфинитезимального анализа и его применение в самых различных областях математики (от математической экономики до теории K-пространств) началось в конце 70-х годов после опубликования теории внутренних множеств Э.Нельсона.

Первые шаги в области комбинирования нестандартных (булевозначных и инфинитезимальных) методов анализа были сделаны в 80-е годы работах С.С. Кутателадзе, в которых реализован метод булевозначного моделирования в инфинитезимальном универсуме. В дальнейшем, А.Е. Гутманом, А.Г. Кусраевым, С.С. Кутателадзе и другими исследователями были разработаны различные подходы к комбинированию методов инфинитезимального и булевозначного анализа, что послужило исходной точкой для многих направлений исследований. Среди этих подходов мы отметим метод инфинитезимального моделирования в булевозначном универсуме А.Г. Кусраева и С.С. Кутателадзе и попытку построения булевозначной модели теории внутренних множеств А.Е. Гутмана и А.И. Попова, приведшую авторов к доказательству невозможности построения такой модели.

В рамках изучения векторных решеток в настоящей работе предлагается другой вариант совместного использования идей и методов инфинитезимального и булевозначного анализа, с помощью которого становится возможным изучение «поточечных» свойств векторных решеток. В связи с этим ставится задача введения понятий инфинитезимального анализа вещественной прямой (по аналогии с теорией Э.Нельсона) в слоях поливерсума, что позволило бы с новых позиций подойти к упрощению работы с векторными решетками методами булевозначного анализа.

Целью диссертации является изучение свойств поливерсума, позволяющих упростить работу с K-пространствами и векторными решетками с помощью техники инфинитезимального анализа.

Методы исследования. В работе были использованы основные положения и результаты инфинитезимального и булевозначного анализа, а также теории векторных решеток.

Научная новизна и основные результатов работы, выносимые на защиту. В работе получены следующие новые результаты:

(1) Изучены аналоги понятий инфинитезимального анализа на вещественной прямой в рамках функционального представления булевозначного универсума (непрерывного поливерсума). Это позволи-

ло найти один из возможных вариантов решения задачи Кусраева-Кутателадзе о построении булевозначной интерпретации нестандартной оболочки и изучении соответствующей конструкции «спущенной» нестандартной оболочки.

(2) Введено понятие внешних сечений и разработаны методы их использования. Показано, что определенный класс внешних сечений является булевозначным аналогом множества векторных решеток. Новое понятие позволяет упрощать доказательства многих утверждений о K-пространствах и векторных решетках переходя к их «поточечным» аналогам, что сводит изучение векторных решеток к изучению подмножеств множества вещественных чисел в рамках инфинитезимального анализа.

(3) Формализовано понятие поточечного критерия и детально исследовано, какие из рассматриваемых свойств векторных решеток и K-пространств имеют поточечные аналоги.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Разработанные в ней методы могут быть использованы специалистами в области векторных решеток и функционального анализа знакомыми с методами инфинитезимального анализа, без детального изучения аппарата булевозначного анализа. Полученные результаты могут использованы в курсах нестандартного анализа, булевозначного анализа, функционального анализа и ряде других спецкурсов, читаемых на механико-математических факультетах университетов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международной конференции по функциональным пространствам (4th Conference On Function Spaces SIUE, Edwardsville, USA, 2002), на XXIII Конференция молодых ученых мехмата МГУ в 2001 г., на XXXVIII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс", НГУ в 2000 г., а также на семинарах отдела математического анализа Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

1.2 Постановка проблемы и литературный обзор

1.2.1 Булевозначный анализ

Возникновение булевозначного анализа связано со знаменитыми работами П. Дж. Коэна, в которых предложен метод форсинга для доказательства непротиворечивости добавления отрицания гипотезы континуума к аксиомам теории множеств ZFC. В современном варианте это доказательство состоит в построении булевозначной модели теории множеств, в которой верно отрицание гипотезы континуума.

Впоследствии интерес к булевозначному анализу был вызван еще и тем, что многие относительно сложные объекты математического анализа имеют значительно более простые изображения в булевозначных моделях. К настоящему времени, булевозначному анализу посвящен ряд монографий, среди которых мы отметим [20, 31, 55, 60].

Изучение объектов математического анализа при помощи булевозначных моделей осуществляется следующим образом. В первую очередь, осуществляется выбор соответствующей булевой алгебры B. Затем, при помощи так называемой операции подъема объект исследований переводится в булевозначный универсум $\mathbb{V}^B$. В универсуме $\mathbb{V}^B$ этот объект выглядит иначе (при подходящем выборе алгебры B он выглядит проще). Так как $\mathbb{V}^B$ является моделью теории множеств, то известные факты о новом (более простом) объекте верны и в этой модели; они могут быть интерпретированы как свойства исходного объекта при помощи так называемой операции спуска.

Булевозначный универсум строится по (произвольной) полной булевой алгебре B. Каждой формуле φ, переменные которой теперь пробегают $\mathbb{V}^B$, ставится в соответствие элемент $\|\varphi\|$ исходной булевой алгебры B. Величину $\|\varphi\|$ называют истинностью (или оценкой истинности) формулы φ. Формулы получающие наибольшую оценку истинности 1_B называют истинными в $\mathbb{V}^B$. Истинными в любом булевозначном универсуме оказываются все теоремы теории множеств ZFC. Таким образом, булевозначный универсум это модель теории множеств не с двузначной, а с B-значной логикой, т.е. истинность любого утверждения есть элемент булевой алгебры B. (Этим и объясняется название данного направления нестандартного анализа — булевозначный анализ.)

Важную роль в булевозначном анализе играет каноническое вложение $(\cdot)^\wedge$, осуществляющее погружение класса всех множеств $\mathbb{V}$ в булевозначную модель $\mathbb{V}^B$. При этом отображении, например, пустое множество переходит в пустое множество булевозначной модели, вещественные числа в вещественные числа, и т.д. В диссертации каноническое вложение используется для определения предиката стандартности St (см. ниже раздел 1.2.4) для вещественных чисел в слоях функционального представления булевозначного универсума (поливерсума), делая доступными многие факты инфинитезимального анализа для изучения элементов булевозначных моделей.

1.2.2 Непрерывный поливерсум

Решающим шагом в области использования достижений булевозначного анализа для решения аналитических задач стало открытие А.Е. Гутманом и Г.А. Лосенковым функционального представления булевозначного универсума в работе [12]. До этой работы использование методов булевозначного анализа было сопряжено с достаточно сложной техникой прежде всего логического характера, что осложняло работу с этими методами специалистов в области, например, функционального анализа.

В работе А.Е. Гутмана и Г.А. Лосенкова для произвольного булевозначного универсума предложен удобный функциональный аналог — непрерывный поливерсум, представляющий собой непрерывное расслоение (над некоторым экстремально несвязным компактом Q), слоями которого являются классические модели теории множеств. При этом булевозначный универсум представляется в виде класса непрерывных сечений поливерсума — непрерывных функций, сопоставляющих каждой точке компакта Q элемент соответствующего слоя. Точнее, авторы показывают, что класс непрерывных сечений поливерсума является булевозначной алгебраической системой, удовлетворяющей всем основным принципам булевозначного анализа, а также устанавливают, что любая такая булевозначная алгебраическая система может быть представлена в виде класса сечений подходящего непрерывного поливерсума.

Таким образом, исследователи в области функционального анализа могут иметь дело не с абстрактным булевозначным универсумом, а с его функциональным аналогом — моделью, элементами которой являются непрерывные функции, а основные операции вычисляются поточечно.

В рамках затронутой в настоящей работе проблематики важно, что описанная функциональная модель позволяет ввести в рассмотрение такие понятия инфинитезимального анализа как бесконечная близость чисел и элементов нормированного пространства внутри слоя поливерсума. Таким образом, методы инфинитезимального анализа возможно будет применять «поточечно» для изучения свойств объектов функционального анализа, имеющих соответствующее булевозначное представление.

1.2.3 Изучение векторных решеток средствами булевозначного анализа

Теория векторных решеток и K-пространств изложена во многих монографиях, среди которых мы отметим [1, 16, 17, 6, 30, 46, 56, 57]. В последние десятилетия развитие этой теории в значительной мере определялось исследованиями, использующими методы булевозначного анализа.

В этой области основополагающей явилась теорема Гордона [7], которая говорит о том, что произвольное расширенное K-пространство является интерпретацией поля вещественных чисел соответствующей булевозначной модели. Это позволяет переносить известные факты о вещественных числах на K-пространства: любая теорема (теории ZFC) о вещественных числах имеет свой аналог для K-пространств. Стоит отметить, что некоторые частные случаи этой теоремы были известны и ранее, см. [59], а также исчерпывающий обзор в [11].

Следующим шагом в направлении изучения векторных решеток булевозначными методами анализа стала реализационная теорема Кусраева [18], утверждающая, что любая архимедова векторная решетка реализуется как подрешетка поля вещественных чисел соответствующей булевозначной модели (рассматриваемого как решетка над $\mathbb{R}^\wedge$). В [18] также приводятся несколько утверждений о реализации неархимедовых векторных решеток.

Описанное представления K-пространств и векторных решеток позволило упростить изучение таких структурных свойств этих объектов, как представление пространствами функций, функциональное исчисление и т.п., сведя их изучение к свойствам поля действительных чисел в подходящей булевозначной модели. Об этих результатах см. [11, 22, 24, 40].

Дальнейшие шаги в этом направлении делались уже в изучении таких относительно более сложных объектов как решеточно-нормированные пространства. Использование булевозначных методов позволяет свести исследование этих объектов к изучению банаховых пространств (см., например, [11, 19, 51, 52]).

Итак, сведение средствами булевозначного анализа исследования более сложных объектов (в частности, векторных решеток) к изучению объектов относительно простых является содержательным направлением функционального анализа, богатым интересными результатами и аналогиями.

В этой связи представляется интересной решенная в настоящей диссертации задача о разработке методики сведения работы с векторными решетками и их подмножествами к поточечной работе с полями вещественных чисел в слоях поливерсума. При этом поле вещественных чисел рассматривается не в булевозначной модели (поле вещественных чисел булевозначной модели само по себе достаточно сложный объект), а в обычных моделях теории множеств (слоях поливерсума).

Разработанная техника внешних сечений позволяет представить векторные решетки и их подмножества в виде непрерывных расслоений, слоями которых являются подмножества множеств вещественных чисел слоев поливерсума. Исследуется, какие свойства векторных решеток имеют поточечные аналоги, т.е. в каких случаях изучение свойств векторной решетки сводится к изучению подмножеств поля вещественных чисел, наделенного инфинитезимальной структурой.

1.2.4 Инфинитезимальный анализ

Первые идеи, легшие в основу современного инфинитезимального анализа, относят к Г.В. Лейбницу, И. Ньютону и Л. Эйлеру. Именно эти ученые первыми пытались оперировать понятиями бесконечно больших и бесконечно малых. Впоследствии эти понятия вновь появились в связи с возникновением теории пределов в работах О. Коши и К. Вейерштрасса. Однако, зарождающиеся идеи инфинитезимального анализа отвергались широкой математической общественностью, поскольку не имели под собой сколь-нибудь формальных оснований. Впервые эти идеи были формально обоснованы лишь в 60х годах прошлого столетия А. Робинсоном [53, 54]. (Исчерпывающий исторический обзор см. в монографии

А.Г. Кусраева и С.С. Кутателадзе [9]).

В настоящее время инфинитезимальный анализ находится в центре внимания многих исследователей, работающих в таких разделах математики, как теория вероятностей и теория меры, теория векторных решеток и K-пространств, негладкий анализ, математическая экономика. Основные достижения в области инфинитезимального анализа и его приложений описаны в многочисленных монографиях, среди которых мы отметим работы [2, 9, 11, 22, 33, 39].

У современного инфинитезимального анализа есть несколько вариантов формального обоснования, наиболее удобным из которых является, пожалуй, теория внутренних множеств (IST) Э. Нельсона [48, 49], развитая, впоследствии, в теорию внешних множеств К. Хрбачека [38] и Т. Каваи [44].

Для точного описания рассматриваемых задач и полученных результатов, перейдем к более формальному описанию, вводя по мере необходимости требуемые определения.

Алфавит теории IST получается путем добавления к алфавиту теории множеств ZFC символа одноместного (неопределяемого) предиката St. Таким образом, в теории IST появляются утверждения вида $\mathrm{St}(x)$, т.е. «x — стандартно» ($\mathrm{St}(x)$ — одна из атомарных формул теории). Работа с новым предикатом формализуется с помощью трех добавочных (для ZFC) аксиом: принципов переноса, идеализации и стандартизации.

При доказательстве «стандартных» теорем можно пользоваться аппаратом теории внутренних множеств с той же степенью надежности что и при работе в рамках теории множеств Цермело-Френкеля; формально, теория IST является консервативным расширением теории ZFC (теорема Поуэлла, см., например, [48]).

Классический объект математического анализа, вещественная прямая, является также интересным примером использования методов инфинитезимального анализа. Именно здесь исследователи имеют дело с объектами, впервые неформально описанными Г.В. Лейбницом, И. Ньютоном и Л. Эйлером.

В рамках теории IST вещественные числа делятся на стандартные и нестандартные. Ограниченным (или доступным) называют число, модуль которого меньше некоторого стандартного. Число N не являющееся ограниченным называют бесконечно большим (недоступным) и пишут $N \approx +\infty$ ($N \approx -\infty$). Число λ называется бесконечно малым, если $|\lambda| < 1/n$ для любого стандартного натурального n. Говорят, что два числа бесконечно близки если их разность бесконечно мала. Отношение бесконечной близости обозначают символом $\approx$.

В качестве примера упрощения классических понятий математического анализа при использовании инфинитезимальных методов приведем нестандартный критерий придела. Для любой стандартной последовательности (λ_n) стандартное число λ является пределом (λ_n) в том и только том случае, если для всех бесконечно больших номеров N член λ_N бесконечно близок к λ, т.е.

$$\lambda = \lim \lambda_n \Leftrightarrow (\forall N \approx +\infty)(\lambda_N \approx \lambda).$$

Элемент стандартного нормированного пространства X называют бесконечно малым (ограниченным, бесконечно большим) если соответствующим свойством обладает его норма. Бесконечно близкими называют элементы нормы которых бесконечно близки. Это отношение обозначается символом $\approx$ и является отношением эквивалентности на X. Фактор-пространство X по отношению $\approx$ называется нестандартной оболочкой X и обозначается $\widehat{X}$ (это понятие впервые введено в [47]). Важным (и уже классическим) фактом современного инфинитезимального анализа является теорема о том, что пространство $\widehat{X}$ полно (даже в том случае, когда X не полно). Подробно об инфинитезимальном анализе на вещественной прямой см. [9, 39]. О нестандартных оболочках нормированных пространств см. [9, 35, 36, 37, 39].

Приведенные определения и факты являются основополагающими в инфинитезимальном анализе; поэтому кажется естественным, что новая (разработанная, например, в рамках функционального представления булевозначного универсума) инфинитезимальная теория должна включать в себя эти понятия и факты. Развитая в диссертации теория инфинитезимального анализа в слоях поливерсума обладает этим свойством и, в этой связи, может рассматриваться как первый шаг в развитии нового подхода к комбинированному использованию нестандартных методов анализа.

Идея, реализованная в диссертации, состоит в том, что стандартными числами в слое поливерсума ассоциированного с точкой q компакта Q объявляются образы вещественных чисел при каноническом вложении $(\cdot)^{\wedge}$, взятые в точке q. Таким образом, предикат St, неопределяемый в теории IST, в слоях поливерсума для чисел определен явным образом. В работе детально исследовано, в каких слоях поливерсума этот подход ведет к содержательной теории.

1.2.5 Комбинирование нестандартных методов анализа

Первые шаги в направлении комбинирования методов инфинитезимального и булевозначного анализа были сделаны С.С. Кутателадзе в работах [25, 26]. Использованный в этих работах метод, булевозначное моделирование в инфинитезимальном универсуме, вместе с другим подходом, инфинитезимальным моделированием в булевозначном универсуме, изложен в работе А.Г. Кусраева и С.С. Кутателадзе [23], которая впервые привлекает внимание исследователей к важности комбинирования нестандартных методов анализа.

В этой работе и, затем, в главе 1 монографии [11] описаны и развиты следующие два подхода к комбинированию нестандартных методов.

Первый подход состоит в изучении стандартной булевозначной модели внутри универсума внутренних множеств Нельсона (или внутри универсума внешних множеств Каваи). При этом специфические средства инфинитезимального анализа, связанные с предикатом стандартности St, используются во внешнем для булевозначного универсума мире — мире спусков. В рамках излагаемого подхода стандартное K-пространство с базой B изучают с помощью стандартного булевозначного универсума $\mathbb{V}^B$. Полученные в этом направлении результаты лежат, в основном, в области изучения фильтров (в частности, в монадологии) и изложены в [25, 26, 23, 11]. В этих работах получены критерий экстенсиональности фильтра, нестандартные критерии перемешивания фильтра, прокомпактности и пропредкомпактности, и многие другие результаты.

Второй подход состоит в применении методов инфинитезимального анализа к объектам, лежащим внутри $\mathbb{V}^B$. В рамках этого подхода, изучение, например, расширенного K-пространства начинается с превращения его с помощью подъема в множество вещественных чисел универсума $\mathbb{V}^B$. Тогда, интерпретируя результаты инфинитезимального анализа вещественных чисел при помощи спусков, можно получать результаты об исходном K-пространстве. Основные результаты полученные в рамках этого подхода изложены в главе 1 работы [11].

Не смотря на достигнутые многочисленные результаты, представляют интерес и другие подходы к синтезу нестандартных методов, так как в рамках изложенных подходов понятия инфинитезимального анализа еще не возникают в булевозначных моделях непосредственно.

А.Е. Гутман и А.И. Попов сделали новую попытку синтезировать нестандартные методы анализа, путем построения булевозначной модели нестандартного универсума. В результате им удалось доказать, что построение такой модели невозможно, что оставляет открытым вопрос о разработке подхода, в рамках которого в булевозначных моделях появились бы инфинитезимальные объекты.

Говоря о задачах, которые лежат в пересечении областей исследования инфинитезимального и булевозначного анализа, Прежде всего стоит отметить, что в работе «Нерешенные нестандартные задачи» [21] А.Г. Кусраев и С.С. Кутателадзе сформулировали ряд проблем, часть которых подразумевает либо совместное использование нестандартных методов, либо нахождение аналогов понятий и фактов инфинитезимального анализа в булевозначных моделях. Среди этих проблем одной из наиболее интересных кажется задача о построении булевозначной интерпретации нестандартной оболочки и изучении соответствующей конструкции «спущенной» нестандартной оболочки. Один из возможных вариантов решения этой задачи предлагается в настоящей диссертации.

Одним из важнейших направлений принадлежащим областям исследований как инфинитезимального, так и булевозначного анализа, принято считать теорию векторных решеток и K-пространств.

Исследованию векторных решеток методами инфинитезимального анализа посвящена глава 4 монографии [11], написанная Э.Ю. Емельяновым, в которой также имеется исчерпывающий литературный обзор по данному вопросу. В этой работе рассмотрены, в частности, вопросы инфинитезимального представления векторных решеток; описано нестандартное построение условного пополнения архимедовой векторной решетки; рассмотрена проблема существования $*$-инвариантного гомоморфизма на векторных решетках; введены и изучены два вида нестандартной оболочки векторной решетки: порядковая и регулярная. Из других работ, посвященных изучению векторных решеток методами инфинитезимального анализа стоит отметить [13, 14, 15, 32, 45].

О сведении изучения векторных решеток и K-пространств к изучению вещественных чисел булевозначных моделей рассказано выше в разделе 1.2.3. Другие аспектах булевозначного анализа векторных решеток освещены в [8, 19, 22, 29, 40, 41] и др.

В настоящей работе понятия инфинитезимального анализа на вещественной прямой введены в слоях поливерсума, что открывает новую возможность исследования таких объектов как векторные решетки и K-пространства методами одновременно булевозначного и инфинитезимального анализа.

1.3 Краткое содержание работы

В **главе 3** в слоях функционального представления булевозначного универсума (поливерсума) введено понятие бесконечной близости элементов нормированного пространства (и, в частности, вещественных чисел). Стандартными числами в слое поливерсума ассоциированного с точкой q компакта Q объявляются образы вещественных чисел при каноническом вложении $(\cdot)^\wedge$, взятые в точке q. Найдены аналоги некоторых теорем инфинитезимального анализа, касающиеся вещественных чисел. В том числе, установлено, что каждое ограниченное число λ имеет стандартную часть ${}^\circ\lambda$ — единственное стандартное число, бесконечно близкое к λ.

Используя введенные понятия, теорема о полноте нестандартной оболочки нормированного пространства перенесена на слои поливерсума, ассоциированные с не σ-изолированными точками компакта Q. Полноту нестандартной оболочки удалось доказать благодаря установленному в этой же главе критерию насыщенности слоя поливерсума. Точнее, доказана следующая теорема.

Теорема 1.3.1. *Пусть ${}^q\mathbb{V}$ — слой в точке $q \in Q$ непрерывного поливерсума над экстремально несвязным компактом Q. Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *точка q не является σ-изолированной;*

(б) *модель ${}^q\mathbb{V}$ счетно насыщена;*

(в) *нестандартная оболочка любого нормированного пространства внутри ${}^q\mathbb{V}$ полна.*

В **главе 4** введено понятие непрерывного внешнего сечения, в определенном смысле обобщающее понятие сечения. Значением внешнего сечения в точке компакта Q является не элемент, а подмножество соответствующего слоя поливерсума. Таким образом, внешнее сечение поливерсума, как и сам поливерсум, является непрерывным расслоением, множество непрерывных сечений которого называется его спуском.

Спуски внешних сечений, обладающих определенными свойствами, являются векторными решетками. Более того, любая векторная решетка оказывается изоморфной спуску подходящего внешнего сечения.

Понятие стандартной части, введенное в главе 3, позволяет получить явное описание изоморфизма между спусками внешних сечений поливерсума и подрешетками пространства расширенных функций $C_\infty(Q)$, представляющего собой общий вид расширенного K-пространства. А именно, каждая подрешетка $C_\infty(Q)$ совпадает с решеткой функций $q \mapsto {}^\circ u(q)$, где u — элементы спуска некоторого внешнего сечения поливерсума. Соответствующая теорема доказана в параграфе 4.1.

Новое функциональное представление позволяет упрощать доказательства многих утверждений о K-пространствах и векторных решетках с помощью перехода к их «поточечным» аналогам. В данной главе формализовано понятие поточечного критерия для произвольного свойства векторной решетки и установлено, какие из рассматриваемых свойств имеют поточечные критерии.

Чтобы описать полученные результаты более формально, нам потребуется несколько определений.

Подмножество F векторной решетки E назовем *конечно-цикличес-ким*, если для любых элементов $f_1, \dots, f_n \in F$ и для любых попарно дизъюнктных порядковых проекторов $\pi_1, \dots, \pi_n \in Pr(E)$ элемент $\pi_1 f_1 + \dots + \pi_n f_n$ принадлежит F.

Всюду далее мы имеем дело с непрерывным поливерсумом над экстремально несвязным компактом Q. Класс непрерывных сечений поливерсума (который и является булевозначным универсумом) обозначают символом $C(Q, {}^Q\mathbb{V})$. Символ $\mathbb{V}$ обозначает универсум всех множеств.

Символ $\mathcal{R}$ обозначает множество вещественных чисел поливерсума. *Стандартной частью сечения* $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ назовем $\mathbb{R}$-значную функцию ${}^\circ u$, определенную на множестве $\operatorname{dom} {}^\circ u$ тех точек $q \in Q$, в которых внутреннее число $u(q)$ ограничено, полагая $({}^\circ u)(q) = {}^\circ\big(u(q)\big)$ для всех $q \in \operatorname{dom} {}^\circ u$.

Пусть $D \in \mathrm{Clop}(Q)$. Функцию $s : D \to \mathbb{V}$ назовем *внешним сечением*, если $s(q) \subset {}^q\mathbb{V}$ для любой точки $q \in D$. Внешнее сечение $s : Q \to \mathbb{V}$ назовем *внешним подмножеством* $\mathcal{R}$, если $s(q) \subset {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ для всех $q \in Q$. Пусть $s : D \to \mathbb{V}$ — внешнее сечение. Символом $s{\downarrow}$ обозначим множество $\{u \in C(D, \mathbb{V}^Q) : u(q) \in s(q)$ для всех $q \in D\}$. Ясно, что если s — внешнее подмножество $\mathcal{R}$, то $s{\downarrow} \subset \mathcal{R}{\downarrow}$.

Внешнее сечение s будем называть *непрерывным в точке* $q \in \operatorname{dom} s$, если для любого элемента $x \in s(q)$ найдутся множество $P \in \mathrm{Clop}(q)$ и сечение $u \in s|_P{\downarrow}$ такие, что $u(q) = x$. Внешнее подмножество $\mathcal{R}$ будем называть *непрерывным*, если оно непрерывно во всех точках компакта Q. Множество внешних подмножеств $\mathcal{R}$ условимся обозначать символом $S_\sim(\mathcal{R})$, а множество непрерывных внешних подмножеств $\mathcal{R}$ — символом $C_\sim(\mathcal{R})$. Кроме того, обозначим через $S(\mathcal{R})$ множество всех внешних подмножеств $\mathcal{R}$, непустых в каждой точке компакта Q, а символом $C(\mathcal{R})$ — множество $C_\sim(\mathcal{R}) \cap S(\mathcal{R})$.

Для произвольного $s \in C(\mathcal{R})$ положим $s{\Downarrow} = \{{}^\circ u : u \in s{\downarrow}\}$. Для $s \in C(\mathcal{R})$ обозначим множество $\big\{q \in Q : s(q) = \{{}^q 0\}\big\}$ символом $\{s = 0\}$, а его дополнение — символом $\{s \neq 0\}$. Аналогично обозначим через $\{s \subset o\}$ множество $\{q \in Q : s(q) \subset o({}^q\mathbb{R})\}$, а его дополнение — через $\{s \not\subset o\}$.

Лемма 1.3.2. *Для любого $s \in C(\mathcal{R})$ множество $\{s \neq 0\}$ открыто.*

Лемма 1.3.3. *Для любого $s \in C(\mathcal{R})$ множество $\{s \not\subset o\}$ открыто и всюду плотно в $\{s \neq 0\}$.*

Множество сечений $U \subset C(Q, {}^Q\mathbb{V})$ назовем *конечно-циклическим*, если оно замкнуто относительно конечных перемешиваний.

Теорема 1.3.4. *Множество $E \subset C_\infty(Q)$ является конечно-циклическим тогда и только тогда, когда $E = s{\Downarrow}$ для некоторого $s \in C(\mathcal{R})$.*

Ясно, что для любого конечно-циклического множества $E \subset C_\infty(Q)$ непрерывное внешнее подмножество $s \in C(\mathcal{R})$, фигурирующее в формулировке теоремы 1.3.4, единственно. Условимся обозначать это внешнее подмножество символом $E{\Uparrow}$. Очевидно, для любого конечно-циклического множества $E \subset C_\infty(Q)$ имеет место равенство $E = E{\Uparrow}{\Downarrow}$.

Перейдем к описанию свойств векторных решеток в терминах внешних сечений, подробно приведенному в параграфе 4.2.

Теорема 1.3.5. *Конечно-циклическое множество $E \subset C_\infty(Q)$ является идеалом $C_\infty(Q)$ в том и только том случае, когда для любой точки $q \in Q$ множество $E{\Uparrow}(q)$ является идеалом ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$.*

Теорема 1.3.6. *Идеал $E \subset C_\infty(Q)$ является фундаментом $C_\infty(Q)$ в том и только том случае, когда множество $\{E{\Uparrow} \neq 0\}$ всюду плотно в Q.*

Теорема 1.3.7. *Пусть E — конечно-циклическая векторная подрешетка $C_\infty(Q)$. В E есть слабая порядковая единица тогда и только тогда, когда множество $\{E{\Uparrow} \neq 0\}$ замкнуто (а значит, открыто-замкнуто согласно лемме 1.3.2).*

Теорема 1.3.8. *Идеал E пространства $C_\infty(Q)$ является его полосой тогда и только тогда, когда множество $\{E{\Uparrow} \neq 0\}$ замкнуто и для каждой точки $q \in Q$ верно $E{\Uparrow}(q) = \{{}^q0\}$ или $E{\Uparrow}(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$.*

Можно заметить, что некоторые из приведенных утверждений носят «поточечный» характер, так что проверка соответствующих свойств векторных решеток сводится к проверке определенных утверждений в каждой точке компакта Q.

В параграфе 4.3 формализовано понятие поточечного критерия и получен ряд утверждения, показывающие, какие из рассматриваемых свойств векторных решеток имеют поточечные аналоги.

Итак, пусть множества $\mathcal{E}$ и Φ — произвольные множества конечно-циклических подмножеств пространства $C_\infty(Q)$. Будем говорить, что *на множестве $\mathcal{E}$ есть поточечный критерий принадлежности множеству* Φ, если найдется семейство множеств $\varphi_q \subset \mathcal{P}({}^q\mathbb{R}{\downarrow})$, $q \in Q$, удовлетворяющее следующему условию:

$$\forall E \in \mathcal{E}\ \big(E \in \Phi \Leftrightarrow\ \forall q \in Q\ E{\Uparrow}(q) \in \varphi_q\big). \tag{1}$$

Условие 1 будем называть *поточечным критерием принадлежности* Φ, а семейство $(\varphi_q)_{q\in Q}$ — *реализацией* этого критерия.

Теорема 1.3.9. *(а) На множестве фундаментов $C_\infty(Q)$ есть поточечный критерий существования слабой единицы: в фундаменте $E \subset C_\infty(Q)$ есть слабая порядковая единица тогда и только тогда, когда $E{\Uparrow}(q) \neq \{{}^q0\}$ для всех $q \in Q$ $\big($т.е. поточечный критерий реализуется семейством множеств $\varphi_q = \mathcal{P}({}^q\mathbb{R}{\downarrow})\backslash\{\{{}^q0\}\}$, $q \in Q\big)$.*

(б) Если экстремально несвязный компакт Q бесконечен, то на множестве идеалов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия существования слабой порядковой единицы.

Теорема 1.3.10. *Пусть экстремально несвязный компакт Q бесконечен. Тогда на множестве фундаментов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия существования сильной порядковой единицы.*

Теорема 1.3.11. *На множестве идеалов $C_\infty(Q)$ есть поточечный критерий принадлежности множеству фундаментов в том и только том случае, когда множество изолированных точек компакта Q всюду плотно в Q. Критерий следующий: идеал $E \subset C_\infty(Q)$ является фундаментом тогда и только тогда, когда $E{\Uparrow}(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$, где $\varphi_q = \{{}^q\mathbb{R}{\downarrow}\}$, если точка q изолирована, и $\varphi_q = \mathcal{P}({}^q\mathbb{R}{\downarrow})$ в противном случае.*

Теорема 1.3.12. *Если экстремально несвязный компакт Q бесконечен, то на множестве идеалов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия принадлежности множеству полос $C_\infty(Q)$.*

В параграфе 4.4 приведена таблица условий существования поточечных критериев для рассмотренных нами множеств и свойств.

2 Предварительные сведения

В этой главе приведены некоторые определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения. По мере необходимости (в основном в параграфах 2.3 и 2.4) мы вводим также некоторые новые определения и обозначения, используемые в дальнейшем.

2.1 Топологические пространства и расширенные функции

В изложении материала этого параграфа, касающегося расширенных функций мы следуем, в основном, [10] (§ 1.1). О топологических пространствах см., например, [3, 4, 27].

Компакт называется экстремально несвязным, если замыкание любого его открытого подмножества открыто. На протяжении всего текста Q — экстремально несвязный компакт. Символом $\mathrm{Clop}(Q)$ обозначают совокупность всех открыто-замкнутых подмножеств Q, а символом $\mathrm{Clop}(q)$ — совокупность всех открыто-замкнутых подмножеств Q, содержащих точку $q \in Q$.

Точка топологического пространства называется σ-изолированной (или P-точкой), если пересечение любого счетного множества ее окрестностей является окрестностью этой точки.

Пусть D — всюду плотное подмножество Q и $f : D \to R$ — непрерывная функция. Будем говорить, что функция f *имеет предел* $\lambda \in R$ в точке $q \in Q$, если для любой открытой окрестности V точки λ найдется открытая окрестность U точки q такая, что $f[U] \subset V$. Благодаря непрерывности f это определение предела отличается от классического лишь тем, что значения функции в изолированных точках объявляются ее пределами в этих точках. Рассмотрим множество $\overline{D}$ всех точек $q \in Q$, в которых функция f имеет предел, и обозначим этот предел через $\bar{f}(q)$.

Функция $\bar{f} : \overline{D} \to R$, очевидно, является продолжением f. Известно, что функция $\bar{f}$ непрерывна и определена на котощем подмножестве Q, (см. [10], Теорема 1.1.1). Функцию $\bar{f}$ называют *максимальным расширением* f. Определенная на всюду плотном подмножестве Q функция называется *расширенной*, если она совпадает со своим максимальным расширением.

Множество расширенных функций обозначают символом $C_\infty(Q)$. Заметим, что любая функция $f \in C_\infty(Q)$ имеет продолжение $\overline{f} \in C(Q, \overline{\mathbb{R}})$. Две функции $f, g \in C_\infty(Q)$ равны в том и только том случае, когда они равны на всюду плотном подмножестве Q.

2.2 Булевы алгебры

О булевых алгебрах см. монографии [5, 28, 34, 42].

В произвольной булевой алгебре символ $\perp$ обозначает отношение дизъюнктности: $a \perp b \Leftrightarrow a \wedge b = 0$. Семейство элементов булевой алгебры называется *дизъюнктным*, если любые два его элемента попарно дизъюнктны.

Следующее теорема носит название принципа исчерпывания.

Теорема. *Пусть B — полная булева алгебра. Тогда для всякого семейства $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов B существует такое дизъюнктное семейство $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, что $b_\xi \leqslant a_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ и $\sup_{\xi\in\Xi} a_\xi = \sup_{\xi\in\Xi} b_\xi$.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [28], теорема 20.2.

Следующая теорема была доказана Стоуном и Огасаварой [50, 58].

Теорема. *Пусть B — полная булева алгебра и Q — совокупность всех ультрафильтров в B. Для каждого элемента $b \in B$ обозначим множество $\{q \in Q : b \in q\}$ через $\hat{b}$. Множество $\{\hat{b} : b \in B\}$ является* *базой некоторой топологии на Q, относительно которой Q является экстремально несвязным компактом. Кроме того, отображение $b \mapsto \hat{b}$ осуществляет булев изоморфизм между алгебрами B и* $\mathrm{Clop}(Q)$

Компакт Q, построенный в формулировке последней теоремы, называется *стоуновским компактом* булевой алгебры B.

2.3 Векторные решетки

Теория векторных решеток и K-пространств изложена во многих монографиях, см. например [1, 16, 17, 6, 30, 46, 56, 57].

Всюду ниже под векторной решеткой мы понимаем решеточно упорядоченное векторное пространство. При этом, если явно не оговорено противное, все рассматриваемые векторные решетки предполагаются архимедовыми.

В векторной решетке E элементы e и f называются *дизъюнктными*, если $|e| \wedge |f| = 0$. Дизъюнктное дополнение $\{e \in E : e \perp f$ для всех $f \in F\}$ множества $F \subset E$ обозначается через $F^{\perp}$. Подмножество векторной решетки, имеющее вид $F^{\perp\perp}$ для некоторого $F \subset E$, называется *полосой*. Подмножество $F \subset E$ является полосой тогда и только тогда, когда $F^{\perp\perp} = F$. Полосы вида $\{e\}^{\perp\perp}$, где $e \in E$, называются *главными*. Полосы векторной решетки образуют полную булеву алгебру. Элемент $1 \in E$ называется *слабой порядковой единицей*, если $1 \geqslant 0$ и $\{1\}^{\perp\perp} = E$, и *сильной порядковой единицей*, если для каждого элемента $e \in E$ существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $|e| \leqslant \lambda 1$.

Линейный оператор $\pi : E \to E$ называется *порядковым проектором*, если $\pi^2 = \pi$ и $0 \leqslant \pi e \leqslant e$ для всех положительных элементов $e \in E$. Множество всех порядковых проекторов векторной решетки E обозначается символом $Pr(E)$. Образ любого порядкового проектора является полосой. Каждый порядковый проектор однозначно определяется своим образом. Порядковые проекторы векторной решетки E образуют булеву алгебру. В пространстве $C_\infty(Q)$ для любого порядкового проектора π найдется единственное множество $P \in \mathrm{Clop}(Q)$ такое, что $\pi f = \chi_P f$ для всех $f \in C_\infty(Q)$, где χ_P — характеристическая функция множества P. Соответствие $\pi \mapsto P$ является изоморфизмом между булевыми алгебрами $Pr\bigl(C_\infty(Q)\bigr)$ и $\mathrm{Clop}(Q)$.

Множество $F \subset E$ назовем *конечно-циклическим*, если для любых элементов $f_1, \ldots, f_n \in F$ и для любых попарно дизъюнктных порядковых проекторов $\pi_1, \ldots, \pi_n \in Pr(E)$ элемент $\pi_1 f_1 + \cdots + \pi_n f_n$ принадлежит F.

Тот факт, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ монотонно убывает и $\inf_{\alpha \in \mathrm{A}} = e$, коротко обозначают формулой $e_\alpha \downarrow e$. Говорят, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *o-сходится* к элементу $e \in E$ и пишут $e = o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} e_\alpha$, если в E найдется сеть $(f_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ такая, что $f_\beta \downarrow 0$ и $\forall\, \beta \in \mathrm{B}\ \exists\, \overline{\alpha} \in \mathrm{A}\ \forall\, \alpha \geqslant \overline{\alpha}\ |e_\alpha - e| \leqslant f_\beta$. Если в роли сети $(f_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ выступает последовательность $(f/n)_{n \in \mathbb{N}}$ для некоторого $f \geqslant 0$, то говорят, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *r-сходится* к элементу $e \in E$ (с регулятором f) и пишут $e = r\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} e_\alpha$.

Векторное подпространство $F \subset E$ называют *(порядковым) идеалом* векторной решетки E, если для любых $f \in F$ и $e \in E$ из $|e| \leqslant |f|$ следует $e \in F$. Идеал F называют *главным* (порожденным элементом $e \in F$) если для любого элемента $f \in F$ верно $|f| \leqslant n|e|$ для некоторого числа $n \in \mathbb{N}$. Идеал F называют *фундаментом*, если $F^{\perp\perp} = E$.

Пространством Канторовича или *K-пространством* называется векторная решетка, в которой любое ограниченное сверху (снизу) подмножество имеет точную верхнюю (нижнюю) границу. *Расширенным K-пространством* называется K-пространство, в котором любое дизъюнктное подмножество ограничено. Любое K-пространство является фундаментом некоторого (единственного с точностью до изоморфизма) расширенного K-пространства. Любое расширенное K-пространство изоморфно пространству $C_\infty(Q)$, где Q — стоуновский компакт булевой алгебры полос данного пространства.

2.4 Булевозначные модели и непрерывный поливерсум

Подробные сведения о непрерывных расслоениях и непрерывном поливерсуме имеются в [12]. По булевозначному анализу см. монографии [20, 31, 55, 60].

Символом $\mathbb{V}$ мы обозначаем класс всех множеств и предполагаем, что $\mathbb{V}$ является моделью ZFC (а точнее, NBG; см., например, [20, 60]).

На протяжении всего текста Q — экстремально несвязный компакт. Символом $\operatorname{Clop}(Q)$ обозначают совокупность всех открыто-замкнутых подмножеств Q, а символом $\operatorname{Clop}(q)$ — совокупность всех открыто-замкнутых подмножеств Q, содержащих точку $q \in Q$. Пусть $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$ — класс-соответствие, на котором задана некоторая топология (см. [12]). Класс всех открыто-замкнутых подмножеств V^Q обозначается через $\operatorname{Clop}(V^Q)$. Для каждой точки $q \in Q$ класс $V^Q \cap \big(\{q\} \times \mathbb{V}\big) = \big\{(q, x) \mid (q, x) \in V^Q\big\}$ обозначают символом V^q.

Соответствие V^Q называют *непрерывным расслоением* над Q, а класс V^q — *слоем* расслоения V^Q в точке q.

Функцию $u : D \to V^Q$ называют *сечением* расслоения V^Q над множеством $D \subset Q$, если $u(q) \in V^q$ для всех $q \in D$. Под *непрерывным сечением* расслоения V^Q понимается сечение, являющееся непрерывной функцией. Для любого подмножества $D \subset Q$ символом $C(D, V^Q)$ обозначается класс всех непрерывных сечений V^Q над D.

Как установлено в [12] (предложения 2.3 и 2.5), если выполнены условия

(1) $\forall\, q \in Q \quad \forall\, x \in V^q \quad \exists\, u \in C(Q, V^Q) \quad u(q) = x;$

(2) $\forall\, u \in C(Q, V^Q) \quad \forall\, A \in \operatorname{Clop}(Q) \quad u(A) \in \operatorname{Clop}(V^Q),$

то непрерывное расслоение V^Q обладает следующими свойствами:

(i) топология V^Q хаусдорфова;

(ii) для любых $u \in C(Q, V^Q)$ и $q \in Q$ множество $\{u(A) \mid A \in \mathrm{Clop}(q)\}$ является базой окрестностей точки $u(q)$;

(iii) все элементы $C(Q, V^Q)$ являются открытыми и замкнутыми отображениями;

(iv) топология V^Q экстремально несвязна.

В дальнейшем мы предполагаем, что для каждой точки $q \in Q$ класс V^q является алгебраической системой сигнатуры $\{\in\}$.

Для произвольной формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ сигнатуры теории множеств и сечений $u_1, \dots, u_n$ расслоения V^Q символом $\{\varphi(u_1, \dots, u_n)\}$ обозначают множество

$$\{q \in \mathrm{dom}\, u_1 \cap \dots \cap \mathrm{dom}\, u_n \mid V^q \models \varphi(u_1(q), \dots, u_n(q))\}.$$

Для любого элемента $x \in \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — алгебраическая система сигнатуры $\{\in\}$, *спуском* x называется класс $x{\downarrow} := \{y \in \mathbb{U} \mid \mathbb{U} \models y \in x\}$. Если в системе $\mathbb{U}$ истинна аксиома экстенсиональности, то для всех $x, y \in \mathbb{U}$ равенства $x{\downarrow} = y{\downarrow}$ и $x = y$ равносильны. Далее нас в основном будет интересовать случай $\mathbb{U} = V^q$.

Для произвольного сечения $u \in C(Q, V^Q)$ класс $\bigcup_{q \in Q} u(q){\downarrow}$ называется *распаковкой* сечения u и обозначатся символом $\llcorner u \lrcorner$.

Непрерывное расслоение V^Q называется (*непрерывным*) *поливерсумом* над Q, если в каждом слое V^q $(q \in Q)$ истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности и, кроме того, в дополнение к (1) и (2) выполнены следующие условия:

(3) $\forall\, u \in C(Q, V^Q) \quad \llcorner u \lrcorner \in \mathrm{Clop}(V^Q)$;

(4) $\forall X \in \mathrm{Clop}(V^Q) \quad \exists u \in C(Q, V^Q) \quad \llcorner u \lrcorner = X$.

Для произвольных сечений $u, v \in C(Q, V^Q)$ множества $\{u = v\}$ и $\{u \in v\}$ открыто-замкнуты (см. [12], 3.3), что позволяет ввести в рассмотрение две класс-функции

$$\|\cdot = \cdot\|, \|\cdot \in \cdot\| : C(Q, V^Q) \times C(Q, V^Q) \to \mathrm{Clop}(Q),$$

полагая $\|u = v\| = \{u = v\}$ и $\|u \in v\| = \{u \in v\}$.

Несложно убедиться в том, что тройка $\big(C(Q, V^Q),\ \|\cdot = \cdot\|,\ \|\cdot \in \cdot\|\big)$ представляет собой отделимую $\mathrm{Clop}(Q)$-значную алгебраическую систему.

Как показывает следующая теорема ([12], 4.10), класс непрерывных сечений поливерсума представляет собой общий вид булевозначного универсума.

Теорема. *Пусть Q — стоуновский компакт полной булевой алгебры B.*

(а) Класс $C(Q, V^Q)$ непрерывных сечений поливерсума V^Q над Q является булевозначным универсумом над $\mathrm{Clop}(Q)$.

(б) Для любого булевозначного универсума $\mathbb{U}$ над B существует поливерсум V^Q над Q, класс $C(Q, V^Q)$ непрерывных сечений которого изоморфен $\mathbb{U}$.

Всюду далее $\mathbb{V}^Q$ — непрерывный поливерсум, а $\mathbb{V}^q$ — его слой в точке $q \in Q$, который мы также будем обозначать символом ${}^q\mathbb{V}$. (Заметим, что ${}^q\mathbb{V}$ представляет собой модель ZFC.)

Условимся обозначать символами $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ множества вещественных и натуральных чисел ($0 \notin \mathbb{N}$), а символами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$ — элементы $C(Q, \mathbb{V}^Q)$, являющиеся в $C(Q, \mathbb{V}^Q)$ множествами вещественных и натуральных чисел. Введем также обозначения ${}^q\mathbb{R} = \mathcal{R}(q)$, ${}^q\mathbb{N} = \mathcal{N}(q)$, и для числа $\alpha \in \mathbb{R}$ символом ${}^q\alpha$ будем обозначать элемент $\alpha^\wedge(q) \in {}^q\mathbb{V}$, где $(\cdot)^\wedge$ — каноническое вложение $\mathbb{V}$ в $C(Q, \mathbb{V}^Q)$ (см. [20], II.2.2.7). Кроме того, символом ${}^q\varnothing$ обозначим элемент $\varnothing^\wedge(q) \in {}^q\mathbb{V}$.

Если элемент $X \in {}^q\mathbb{V}$ является внутри ${}^q\mathbb{V}$ полем или упорядоченным множеством, то на $X{\downarrow}$ можно естественным образом ввести операции поля или, соответственно, отношение порядка. Например, для $\alpha, \beta \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ сумма $\alpha + \beta$ определяется как такой элемент $\gamma \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$, что ${}^q\mathbb{V} \models (\gamma = \alpha + \beta)$. Легко проверить, что спуск поля является полем. Если элемент $X \in {}^q\mathbb{V}$ является внутри ${}^q\mathbb{V}$ векторным пространством над полем $F \in {}^q\mathbb{V}$, то $X{\downarrow}$ окажется векторным пространством над полем $F{\downarrow}$.

Лемма. *Для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ элемент ${}^q\alpha \in {}^q\mathbb{V}$ является числом внутри ${}^q\mathbb{V}$, т.е. ${}^q\alpha \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Функция ${}^q(\cdot) : \mathbb{R} \to {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ инъективна и сохраняет отношение порядка и операции сложения и умножения. Кроме того, $\mathbb{N}^\wedge(q) = {}^q\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^\wedge(q) \subset {}^q\mathbb{R}$ внутри ${}^q\mathbb{V}$.*

Доказательство этой леммы несложно провести, используя свойства канонического вложения $(\cdot)^\wedge$, изложенные, например, в [20], и опираясь на классическое определение числовых множеств, при котором натуральными числами являются (ненулевые) конечные ординалы, рациональные числа вводятся как классы эквивалентности пар целых чисел, а вещественные числа определяются как дедекиндовы сечения множества рациональных чисел.

Условимся в дальнейшем отождествлять элементы $\alpha \in \mathbb{R}$ и ${}^q\alpha \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ и, тем самым, считать, что $\mathbb{R} \subset {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$.

Пусть $\mathbb{U}$ — класс, являющийся моделью сигнатуры теории множеств, а элемент $P \in \mathbb{U}$ является внутри $\mathbb{U}$ отношением (т.е. множеством пар). Рассмотрим следующее свойство последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $(\operatorname{dom} P){\downarrow}$: если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется элемент $y_n \in \mathbb{U}$ такой, что $\mathbb{U} \models \big((x_1, y_n), \dots, (x_n, y_n) \in P\big)$, то существует элемент $y \in \mathbb{U}$, для которого $\mathbb{U} \models \big((x_n, y) \in P\big)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Отношение P называется *счетно* *насыщенным*, если любая последовательность элементов $(\operatorname{dom} P){\downarrow}$ обладает указанным выше свойством. Говорят, что класс $\mathbb{U}$ является *счетно насыщенным*, если любое отношение в $\mathbb{U}$ счетно насыщено.

3 Инфинитезимальный анализ в слоях поли- версума

В данной главе устанавливается критерий счетной насыщенности слоя поливерсума, предлагаются аналоги некоторых теорем инфинитезимального анализа о поле вещественных чисел и нормированных пространствах и исследуется вопрос о полноте нестандартной оболочки нормированного пространства в слое поливерсума.

3.1 Критерий счетной насыщенности слоя поливерсума

В данном параграфе сформулирован и доказан критерий счетной насыщенности слоя поливерсума, а также доказано несколько утверждений. необходимых для развития теории инфинитезимального анализа на прямой в слоях поливерсума.

Теорема 3.1.1. *Класс* ${}^q\mathbb{V}$ *счетно насыщен тогда и только тогда, когда точка* $q \in Q$ *не является* σ*-изолированной.*

Доказательство. `Достаточность.` Предположим, что точка q не является σ-изолированной, и установим счетную насыщенность класса ${}^q\mathbb{V}$.

Пусть P — элемент ${}^q\mathbb{V}$, являющийся отношением внутри ${}^q\mathbb{V}$. Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathrm{dom}(P){\downarrow}$ и предположим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется элемент $y_n \in {}^q\mathbb{V}$, удовлетворяющий условию

$${}^q\mathbb{V} \models \big((x_1, y_n), \ldots, (x_n, y_n) \in P\big).$$

Покажем, что существует элемент $y \in {}^q\mathbb{V}$, для которого ${}^q\mathbb{V} \models (x_n, y) \in P$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Проведем через P сечение $\mathcal{P} \in C(Q, \mathbb{V}^Q)$, а через x_n и y_n — сечения $u_n, v_n \in C(Q, \mathbb{V}^Q)$ $(n \in \mathbb{N})$. Определим элементы $W_n \in \mathrm{Clop}(Q)$ $(n \in \mathbb{N})$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&W_1 = \|(u_1, v_1) \in \mathcal{P}\|, \\
&W_2 = \|(u_1, v_2), (u_2, v_2) \in \mathcal{P}\| \cap W_1, \\
&\quad \dots \\
&W_n = \|(u_1, v_n), \dots, (u_n, v_n) \in \mathcal{P}\| \cap W_{n-1}, \\
&\quad \dots
\end{aligned}
$$

Случай 1: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$ не является окрестностью точки q.

Положим $D_1 = W_1 \backslash W_2, \ \dots, \ D_n = W_n \backslash W_{n+1}, \ \dots$, и обозначим через D_0 дополнение замыкания $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ до Q. Множества D_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ образуют разбиение единицы в булевой алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$.

Определим сечение $\tilde{v} \in C\big(\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n, \mathbb{V}^Q\big)$, полагая $\tilde{v}|_{D_n} = v_n|_{D_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tilde{v}|_{D_0} = \varnothing^{\wedge}|_{D_0}$. Согласно принципу продолжения (см. [12], 3.8) сечение $\tilde{v}$ (определенное на всюду плотном подмножестве Q) продолжается до сечения $v \in C(Q, \mathbb{V}^Q)$. Покажем, что элемент $y = v(q)$ является искомым. Для этого зафиксируем произвольное число $n \in \mathbb{N}$ и установим включение

$$q \in \|(u_n, v) \in \mathcal{P}\|.$$

Положим $W_0 = \|(u_n, v) \in \mathcal{P}\| \cap W_n$ и покажем, что q принадлежит замыканию W_0 (а следовательно, $q \in W_0$). Допустим вопреки доказываемому, что некоторая окрестность $W \subset W_n$ точки q не пересекается с W_0. Как нетрудно заметить, $D_m \subset W_0$ для всех $m \geqslant n$. Следовательно, $W \subset W_n \backslash \bigcup_{m \geqslant n} D_m$. С другой стороны, множество

$$W_n \backslash \bigcup_{m \geqslant n} D_m = \bigcap_{m \geqslant n} W_m = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_m$$

не является окрестностью точки q.

Случай 2: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ является окрестностью точки q. Поскольку точка q не является σ-изолированной, существует такая убывающая последовательность открыто-замкнутых окрестностей $(W'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точки q, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W'_n$ не является окрестностью q. Без ограничения общности можно считать, что $W'_n \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}} W_m$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Дальнейшее доказательство сводится к повторению рассуждений для случая 1 с заменой W_n на W'_n.

`Необходимость.` Пусть q — σ-изолированная точка. Покажем, что класс ${}^q\mathbb{V}$ не является счетно насыщенным.

Положим $u = \mathbb{N}^\wedge \in C(Q, {}^Q\mathbb{V})$ и пусть P — элемент ${}^q\mathbb{V}$, являющийся внутри ${}^q\mathbb{V}$ множеством всех пар (x, y) элементов $u(q) = {}^q\mathbb{N}$ таких, что $x \neq y$. Покажем, что отношение P не является счетно насыщенным.

Очевидно, ${}^q\mathbb{V} \models \Big(\big({}^q1, {}^q(n+1)\big), \ldots, \big({}^qn, {}^q(n+1)\big) \in P\Big)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим вопреки доказываемому, что существует элемент $y \in u(q){\downarrow}$, удовлетворяющий соотношению ${}^qn \neq y$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Проведем через y сечение $v \in C(Q, {}^Q\mathbb{V})$. Тогда

$$q \in \|v \in u\| = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \|v = n^\wedge\| = \mathrm{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \|v = n^\wedge\|.$$

Поскольку для каждого $m \in \mathbb{N}$ точка q не принадлежит $\bigcup_{n\leqslant m} \|v = n^\wedge\|$, мы заключаем, что $q \in \mathrm{cl}\bigcup_{n>m} \|v = n^\wedge\| =: W_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$, т.е. $q \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} W_m$. С другой стороны, используя попарную дизъюнктность множеств $\|v = n^\wedge\|$ $(n \in \mathbb{N})$, нетрудно показать, что пересечение $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} W_m$ не является окрестностью точки q, и, тем самым, получить противоречие с σ-изолированностью точки q. $\square$

Предложение 3.1.2. *Для любого множества $C \subset {}^q\mathbb{V}$ существует элемент $\widetilde{C} \in {}^q\mathbb{V}$ такой, что $C \subset \widetilde{C}{\downarrow}$.*

Доказательство. Проведем через каждый элемент $c \in C$ сечение $u_c \in C(Q, {}^Q\mathbb{V})$ и положим $u = \{u_c \mid c \in C\}{\uparrow}$. Ясно, что элемент $\widetilde{C} = u(q)$ является искомым. $\square$

Предложение 3.1.3. *Для любого конечного множества $C \subset {}^q\mathbb{V}$ существует элемент $\overline{C} \in {}^q\mathbb{V}$, такой что $C = \overline{C}{\downarrow}$. При этом C является внутри ${}^q\mathbb{V}$ конечным множеством.*

Доказательство. Пусть $C = \{x_1, \dots, x_n\} \subset {}^q\mathbb{V}$. Обозначим символом u подъем множества сечений $\{u_1, \dots u_n\} \subset C(Q, {}^Q\mathbb{V})$, проведенных соответственно через $x_1, \dots, x_n$, и положим $\overline{C} = u(q)$. Очевидно, $x_1, \dots, x_n \in \overline{C}{\downarrow}$. Покажем, что любой элемент $x \in \overline{C}{\downarrow}$ совпадает с x_i для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Проведем через x сечение $v \in C(Q, {}^Q\mathbb{V})$. Ясно, что

$$q \in \|v \in u\| = \bigvee_{i=1}^{n} \|v = u_i\| = \bigcup_{i=1}^{n} \|v = u_i\|,$$

а значит, $x = v(q) = u_i(q) = x_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

Очевидно, элемент $\overline{C}$, фигурирующий в формулировке предложения 3.1.3, однозначно определяется конечным множеством C. Мы будем называть этот элемент *подъемом* множества C и обозначать его символом $C{\uparrow}$.

Пусть $C \subset {}^q\mathbb{V}$, $D \in {}^q\mathbb{V}$ и $f : C \to D{\downarrow}$. Элемент $\overline{f} \in {}^q\mathbb{V}$ будем называть *внутренним продолжением* функции f, если ${}^q\mathbb{V} \models \overline{f} : \overline{C} \to D$, где $\overline{C} \in {}^q\mathbb{V}$, $C \subset \overline{C}{\downarrow}$ и ${}^q\mathbb{V} \models \overline{f}(c) = f(c)$ для всех $c \in C$.

Лемма 3.1.4. *Пусть точка $q \in Q$ не является σ-изолированной. Если C — счетное подмножество ${}^q\mathbb{V}$ и $D \in {}^q\mathbb{V}$, то любое отображение $f : C \to D{\downarrow}$ имеет внутреннее продолжение.*

Доказательство. По предложению 3.1.2 найдется такой элемент $\widetilde{C} \in {}^q\mathbb{V}$, что $C \subset \widetilde{C}{\downarrow}$. Пусть $P \in {}^q\mathbb{V}$ является внутри ${}^q\mathbb{V}$ отношением на множестве всех отображений из подмножеств $\widetilde{C}$ в D, определенным следующим образом:

$$\left(h, \widetilde{h}\right) \in P \;\Leftrightarrow\; \widetilde{h} - \text{продолжение } h.$$

Пусть $C = \{c_1, \dots, c_n, \dots\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через f_n такой элемент ${}^q\mathbb{V}$, что ${}^q\mathbb{V} \models f_n = \big\{\big(c_n, f(c_n)\big)\big\}$, и положим

$$\overline{f}_n = \big\{\big(c_1, f(c_1)\big), \dots, \big(c_n, f(c_n)\big)\big\}\!\uparrow.$$

Ясно, что ${}^q\mathbb{V} \models \big((f_1, \overline{f}_n), \dots, (f_n, \overline{f}_n) \in P\big)$. Тогда из счетной насыщенности класса ${}^q\mathbb{V}$ следует существование такого элемента $\overline{f} \in {}^q\mathbb{V}$, что ${}^q\mathbb{V} \models (f_n, \overline{f}) \in P$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, элемент $\overline{f}$ является искомым внутренним продолжением отображения f. $\square$

3.2 Инфинитезимальный анализ на вещественной прямой в слоях поливерсума

В данном параграфе вводятся обозначения и доказываются основные факты инфинитезимального анализа на вещественной прямой в слоях поливерсума, ассоциированных с не σ-изолированными точками.

Условимся называть элементы ${}^q\mathbb{R}\!\downarrow$ *внутренними числами.* Внутреннее число λ назовем *стандартным*, если существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$ что ${}^q\alpha = \lambda$. Заметим, что с учетом принятого ранее соглашения (о включении $\mathbb{R} \subset {}^q\mathbb{R}\!\downarrow$) мы отождествляем стандартные числа и элементы $\mathbb{R}$.

Ограниченным числом назовем внутреннее число, модуль которого меньше некоторого стандартного числа, и обозначим символом $\mathcal{O}({}^q\mathbb{R})$ множество всех ограниченных чисел. Числа, не являющиеся ограниченными, будем называть *бесконечно большими.*

Внутреннее число λ назовем *бесконечно малым*, если $|\lambda| < \alpha$ для любого стандартного числа $\alpha > 0$. Будем говорить, что два внутренних числа *бесконечно близки*, если их разность бесконечно мала. Отношение бесконечной близости обозначим символом $\approx$. Это отношение является отношением эквивалентности на множестве внутренних чисел. Условимся обозначать символом $[\lambda]$ класс эквивалентности, содержащий внутреннее число λ.

Предложение 3.2.1. *Для любого ограниченного числа λ существует единственное стандартное число, бесконечно близкое к λ.*

Доказательство. *Существование.* Рассмотрим множества

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha < \lambda\}, \quad B = \{\beta \in \mathbb{R} \mid \beta > \lambda\}.$$

Из ограниченности числа λ вытекает, что $A, B \neq \varnothing$. Кроме того, $A \cup B = \mathbb{R}$ и $\alpha < \beta$ для любых $\alpha \in A$ и $\beta \in B$. Положим $\gamma = \sup A = \inf B$. Если $\gamma < \lambda$, то $\gamma \in A$ и, следовательно, $\gamma \approx \lambda$ (поскольку в этом случае γ является наибольшим стандартным числом, меньшим λ). Случай $\gamma > \lambda$ рассматривается аналогично.

Единственность. Если стандартные числа α и β таковы, что $\alpha \neq \beta$ и $\alpha, \beta \approx \lambda$, то число $|\alpha - \beta|$ отлично от нуля и бесконечно мало, что противоречит его стандартности. □

Следствие 3.2.2. *Отображение $\alpha \mapsto [\alpha]$ осуществляет биекцию $\mathbb{R}$ на $\mathcal{O}({}^q\mathbb{R})/{\approx}$.*

Для любого ограниченного числа λ бесконечно близкое к нему стандартное число назовем *стандартной частью* λ и обозначим через ${}^\circ\lambda$.

Замечание 3.2.3. *Легко проверить, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\lambda, \mu \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ справедливо равенство ${}^\circ(\alpha\lambda + \beta\mu) = \alpha\,{}^\circ\lambda + \beta\,{}^\circ\mu$.*

Предложение 3.2.4. *Пусть точка $q \in Q$ не является σ-изолированной. Предположим, что спуск элемента $D \in {}^q\mathbb{V}$ содержит множество $\{n \in \mathbb{N} \mid m \leqslant n\}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует бесконечно большое натуральное число M такое, что внутри ${}^q\mathbb{V}$ справедливо включение*

$$\{n \in {}^q\mathbb{N} \mid m \leqslant n < M\} \subset D.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть отношение P, заданное внутри ${}^{q}\mathbb{V}$ правилом

$$(x,y) \in P \ \Leftrightarrow\ \bigl(x, y \in D \cap {}^{q}\mathbb{N},\ x < y \text{ и } \{n \in {}^{q}\mathbb{N} \mid x \leqslant n < y\} \subset D\bigr),$$

и воспользоваться счетной насыщенностью ${}^{q}\mathbb{V}$. □

3.3 Нестандартная оболочка нормированного пространства

В данном параграфе, в рамках развитой теории, изучается нестандартная оболочка нормированного пространства в слоях поливерсума.

Пусть $X \in {}^{q}\mathbb{V}$ — нормированное пространство над ${}^{q}\mathbb{R}$ внутри ${}^{q}\mathbb{V}$. Элемент $x \in X{\downarrow}$ назовем *ограниченным*, если его норма внутри ${}^{q}\mathbb{V}$ является ограниченным числом. Обозначим символом $\mathcal{O}(X)$ множество всех ограниченных элементов $X{\downarrow}$.

Элементы $x, y \in X{\downarrow}$ будем называть *бесконечно близкими* и писать $x \approx y$, если норма их разности внутри ${}^{q}\mathbb{V}$ бесконечно мала. Отношение бесконечной близости является отношением эквивалентности на множестве $X{\downarrow}$. Класс эквивалентности, содержащий элемент $x \in X{\downarrow}$, условимся обозначать через $[x]$.

Обозначим фактор-множество $\mathcal{O}(X)/{\approx}$ символом $\mathbf{X}$ и положим

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x + y], \quad \lambda\mathbf{x} = [\lambda x], \quad \|\mathbf{x}\| = {}^{\circ}\|x\|$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, где x и y — произвольные представители классов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, и $\|x\|$ — норма элемента x внутри ${}^{q}\mathbb{V}$. Легко показать, что введенные операции определены корректно и превращают $\mathbf{X}$ в нормированное пространство над $\mathbb{R}$, которое мы будем обозначать символом $\widehat{X}$ и называть *нестандартной оболочкой* нормированного пространства X.

Теорема 3.3.1. *Пусть точка $q \in Q$ не является σ-изолированной и $X \in {}^q\mathbb{V}$ — нормированное пространство внутри ${}^q\mathbb{V}$. Тогда нормированное пространство $\widehat{X}$ полно.*

Доказательство. Пусть $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в пространстве $\widehat{X}$ и $x_n \in \mathbf{x}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется число $n_k \in \mathbb{N}$ такое, что ${}^q\mathbb{V} \models \|x_n - x_m\| < 1/k$ для всех $n, m > n_k$. Рассмотрим внутреннее продолжение $(x_n)_{n\in\widetilde{N}} \in {}^q\mathbb{V}$ последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, понимаемой как функция из $\mathbb{N}$ в $X{\downarrow}$ (такое продолжение существует в силу леммы 2). Можно считать, что ${}^q\mathbb{V} \models \widetilde{N} \subset {}^q\mathbb{N}$.

Покажем, что найдется бесконечно большое число $\overline{m} \in {}^q\mathbb{N}{\downarrow}$, принадлежащее $\widetilde{N}{\downarrow}$ и удовлетворяющее внутри ${}^q\mathbb{V}$ неравенству $\|x_n - x_{\overline{m}}\| < 1/k$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$, $n > n_k$. (Тем самым, мы установим, что элемент $x_{\overline{m}} \in X{\downarrow}$ является ограниченным и последовательность $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $[x_{\overline{m}}]$.)

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через E_k элемент ${}^q\mathbb{V}$, удовлетворяющий внутри ${}^q\mathbb{V}$ соотношению

$$E_k = \{m \in \widetilde{N} \mid \|x_i - x_j\| < 1/k \text{ для всех } i, j \in \widetilde{N} \text{ таких, что } n_k < i, j \leqslant m\}.$$

Заметим, что $\mathbb{N} \subset E_k{\downarrow}$, а следовательно, согласно предложению 4

$$\{m \in {}^q\mathbb{N}{\downarrow} \mid m \leqslant m_k\} \subset E_k{\downarrow}$$

для некоторого бесконечно большого числа $m_k \in \widetilde{N}{\downarrow}$. Можно считать, что $m_{k+1} < m_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Благодаря счетной насыщенности ${}^q\mathbb{V}$ существует бесконечно большое число $m \in \widetilde{N}{\downarrow}$ такое, что $m < m_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $m \in E_k{\downarrow}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, а значит, внутреннее число $\overline{m} = m$ является искомым. □

Предложение 3.3.2. *Если точка $q \in Q$ является σ-изолированной, то в ${}^q\mathbb{V}$ все вещественные числа стандартны.*

Доказательство. Сначала покажем, что в ${}^q\mathbb{V}$ нет нестандартных натуральных чисел. Предположим вопреки доказываемому, что существует сечение $u \in C(Q, {}^Q\mathbb{V})$, для которого $C(Q, {}^Q\mathbb{V}) \models u \in \mathcal{N}$ и $u(q) \neq {}^q k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Из σ-изолированности точки q следует, что множество $W = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \|u \neq k^\wedge\|$ является окрестностью q. С другой стороны,

$$Q = \|u \in \mathcal{N}\| = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \|u = k^\wedge\| = \mathrm{cl} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \|u = k^\wedge\|,$$

а значит, множество $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \|u = k^\wedge\| = Q \backslash W$ всюду плотно в Q, что невозможно.

Из доказанного выше следует, что в ${}^q\mathbb{V}$ нет неограниченных вещественных чисел. Для завершения доказательства осталось заметить, что если $\lambda \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ — нестандартное ограниченное число, то число $1/(\lambda - {}^\circ\lambda)$ является неограниченным. $\square$

Предложение 3.3.2 означает, что в случае σ-изолированной точки q справедливы равенства ${}^q\mathbb{R}{\downarrow} = \mathbb{R}$ и ${}^q\mathbb{N}{\downarrow} = \mathbb{N}$ (с учетом принятого ранее соглашения о включении $\mathbb{R} \subset {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$).

Докажем теперь утверждение, обратное к теореме 3.3.1.

Предложение 3.3.3. *Пусть точка $q \in Q$ является σ-изолированной. Тогда найдется элемент $X \in {}^q\mathbb{V}$, являющийся внутри ${}^q\mathbb{V}$ нормированным пространством, для которого нормированное пространство $\widehat{X}$ не полно.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $X \in {}^q\mathbb{V}$, являющийся внутри ${}^q\mathbb{V}$ неполным нормированным пространством, и покажем, что его нестандартная оболочка $\widehat{X}$ не полна.

Из предложения 5 вытекает, что бесконечная близость элементов $X{\downarrow}$ равносильна их равенству, а значит, элементы $\widehat{X}$ представляют собой синглитоны $\{x\}$ ограниченных элементов $x \in X{\downarrow}$.

Пусть s — элемент ${}^q\mathbb{V}$, который внутри ${}^q\mathbb{V}$ является фундаментальной последовательностью элементов X, не имеющей предела. Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $X{\downarrow}$, полагая x_n равным ${}^q n$-му члену последовательности s внутри ${}^q\mathbb{V}$. Используя предложение 5, легко показать, что $\big(\{x_n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ является фундаментальной последовательностью элементов $\widehat{X}$. С другой стороны, эта последовательность не может иметь предела, поскольку из ее сходимости к элементу $\{x\}\in\widehat{X}$ с очевидностью вытекала бы сходимость последовательности s к элементу x внутри ${}^q\mathbb{V}$. $\square$

В заключение сформулируем теорему, объединяющую основные результаты данной главы.

Теорема 3.3.4. *Пусть ${}^q\mathbb{V}$ — слой в точке $q\in Q$ непрерывного поливерсума над экстремально несвязным компактом Q. Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) точка q не является σ-изолированной;

(б) модель ${}^q\mathbb{V}$ счетно насыщена;

(в) нестандартная оболочка любого нормированного пространства внутри ${}^q\mathbb{V}$ полна.

4 Изучение векторных решеток синтетическими методами нестандартного анализа

В данной главе, в рамках разработанной в предыдущих разделах теории, новыми методами устанавливается изоморфизм между $\mathcal{R}{\downarrow}$ и $C_\infty(Q)$, используемый затем для разработки теории внешних сечений. Устанавливается, что спуски внешних сечений, обладающие определенными свойствами, являются векторными решетками; более того, любая векторная решетка изоморфна спуску подходящего внешнего сечения. Формализовано понятие поточечного критерия для векторной решетки и установлено, какие из рассматриваемых свойств имеют поточечные аналоги.

4.1 Изоморфизм между $\mathcal{R}{\downarrow}$ и $C_\infty(Q)$

Изоморфизм между $\mathcal{R}{\downarrow}$ и $C_\infty(Q)$ устанавливает теорема Гордона [7]. В этом разделе этот изоморфизм доказан другими методами, более того, построен явно с привлечением введенных понятий инфинитезимального анализа. Это позволяет разработать теорию внешних сечений и применить ее к изучению векторных решеток, что и сделано в последующих разделах.

Стандартной частью сечения $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ назовем $\mathbb{R}$-значную функцию ${}^\circ u$, определенную на множестве $\operatorname{dom}{}^\circ u$ тех точек $q \in Q$, в которых внутреннее число $u(q)$ ограничено, полагая $({}^\circ u)(q) = {}^\circ\big(u(q)\big)$ для всех $q \in \operatorname{dom}{}^\circ u$.

Сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ назовем *ограниченным (на множестве $D \subset Q$)*, если для любой точки $q \in Q$ ($q \in D$) внутреннее число $u(q)$ ограничено. Множество ограниченных сечений из $\mathcal{R}{\downarrow}$ обозначим символом $\mathcal{O}(\mathcal{R}{\downarrow})$. Нетрудно проверить, что множество $\mathcal{O}(\mathcal{R}{\downarrow})$ является векторной подрешеткой $\mathcal{R}{\downarrow}$.

Лемма 4.1.1. *Сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ ограничено в том и только том случае, когда существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $|u| \leqslant \alpha^{\wedge}$.*

Доказательство. Пусть сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ ограничено. Для любой точки $q \in Q$ найдется число $\alpha_q \in \mathbb{R}$, такое что $|u(q)| \leqslant {}^q(\alpha_q)$. Множество $\{\||u| \leqslant \alpha_q^{\wedge}\| : q \in Q\}$ является открытым покрытием компакта Q. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\||u| \leqslant \alpha_{q_1}^{\wedge}\|, \dots, \||u| \leqslant \alpha_{q_n}^{\wedge}\|$, и положим $\alpha = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i$. Ясно, что $|u| \leqslant \alpha^{\wedge}$. Обратная импликация очевидна. $\square$

Предложение 4.1.2. *Для любого сечения $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ функция $^{\circ}u$ принадлежит $C_{\infty}(Q)$.*

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{dom} {}^{\circ}u$ — всюду плотное подмножество Q. Пусть сечение $N \in \mathcal{R}{\downarrow}$ является в $C(Q, {}^Q\mathbb{V})$ целой частью числа u. Тогда

$$\begin{aligned} Q &= \|N \in \mathcal{N}\| = \|N \in \mathbb{N}^{\wedge}\| \\ &= \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q \in Q : N(q) = n^{\wedge}(q)\} \\ &\subset \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q \in Q : N(q) \leqslant n^{\wedge}(q)\} \\ &= \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q \in Q : u(q) \leqslant n^{\wedge}(q)\} = \operatorname{cl} \operatorname{dom} {}^{\circ}u. \end{aligned}$$

Далее, покажем, что функция $^{\circ}u$ определена на открытом множестве и непрерывна. Для любых $q \in \operatorname{dom} {}^{\circ}u$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$({}^{\circ}u(q) - \tfrac{\varepsilon}{2})^{\wedge}(q) < u(q) < ({}^{\circ}u(q) + \tfrac{\varepsilon}{2})^{\wedge}(q).$$

Следовательно, множество

$$P(q, \varepsilon) = \|({}^{\circ}u(q) - \tfrac{\varepsilon}{2})^{\wedge} < u < ({}^{\circ}u(q) + \tfrac{\varepsilon}{2})^{\wedge}\|$$

является окрестностью точки q, откуда следует, что область определения ${}^\circ u$ открыта. Кроме того,

$$^\circ u\big(P(q,\varepsilon)\big) \subset \big({}^\circ u(q)-\varepsilon, {}^\circ u(q)+\varepsilon\big),$$

а значит, функция ${}^\circ u$ непрерывна.

Для любых $q \in Q \setminus \operatorname{dom} {}^\circ u$ и $n \in \mathbb{N}$ окрестность $P(q,n) = \|u > n^\wedge\|$ точки q удовлетворяет соотношению ${}^\circ u\big(P(q,n)\big) \geqslant n$. Следовательно, функция ${}^\circ u$ не имеет предела в любой точке вне своей области определения и, тем самым, совпадает со своим максимальным расширением. □

Лемма 4.1.3. *Для любых $u_1, u_2 \in \mathcal{R}{\downarrow}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ имеет место равенство ${}^\circ(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 {}^\circ u_1 + \alpha_2 {}^\circ u_2$.*

Доказательство. Согласно замечанию 3.2.3, для всех $q \in \operatorname{dom} {}^\circ u_1 \cap \operatorname{dom} {}^\circ u_1$ выполнено соотношение ${}^\circ(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(q) = \alpha_1 {}^\circ u_1(q) + \alpha_2 {}^\circ u_2(q)$. Остается заметить, что по предложению 4.1.2 все рассматриваемые функции являются элементами $C_\infty(Q)$. □

Лемма 4.1.4. *Пусть $u_1, u_2 \in \mathcal{R}{\downarrow}$. Тогда $u_1 \leqslant u_2 \Leftrightarrow {}^\circ u_1 \leqslant {}^\circ u_2$ (в частности, $u_1 = u_2 \Leftrightarrow {}^\circ u_1 = {}^\circ u_2$).*

Доказательство. Положим $u = u_2 - u_1$. С учетом леммы 4.1.3 достаточно показать, что $u \geqslant 0 \Leftrightarrow {}^\circ u \geqslant 0$.

Сначала докажем эквивалентность равенств $u = 0$ и ${}^\circ u = 0$. Первое равенство, очевидно, влечет второе. Покажем обратное. Пусть ${}^\circ u = 0$. Обозначим символом P множество $\|u \neq 0\|$ и предположим вопреки доказываемому, что $P \neq \varnothing$. Определим сечение v следующим образом: $v(q) = {}^q 1/u(q)$ при $q \in P$ и $v(q) = {}^q 1$ при $q \in Q \setminus P$. Очевидно, что сечение v непрерывно. По предложению 4.1.2 сечение v ограничено на всюду плотном подмножестве Q и, следовательно, в некоторой точке $q \in P$. Поскольку внутреннее число ${}^q 1/u(q)$ ограничено, ${}^\circ u(q) \neq 0$, что противоречит равенству ${}^\circ u = 0$.

Теперь покажем, что $^\circ u > 0 \Leftrightarrow u > 0$. Импликация «$\Rightarrow$» очевидна. По доказанному выше $u > 0$ влечет $^\circ u \neq 0$. Осталось заметить, что из $u > 0$ вытекает $^\circ u \geqslant 0$. $\square$

Предложение 4.1.5. *Для любой функции $f \in C_\infty(Q)$ существует единственное сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ такое, что $^\circ u = f$.*

Доказательство. Единственность следует из леммы 4.1.4. Докажем существование.

Функцию $g \in C_\infty(Q)$ назовем ступенчатой, если найдутся последовательность попарно различных чисел $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и разбиение единицы $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ такие, что $g|_{P_n} = \alpha_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для такой функции g определим сечение $^\bullet g$ как перемешивание сечений $\alpha_n^\wedge$ с весами P_n, $n \in \mathbb{N}$ (см. [20], 2.3.1, 2.5.3). Очевидно, $^\bullet g \in \mathcal{R}{\downarrow}$ и $^\circ(^\bullet g) = g$. Символом $St(Q)$ обозначим множество всех ступенчатых функций.

Далее, пусть $f \in C_\infty(Q)$. Без ограничения общности можно считать, что $f \geqslant 0$. Как легко видеть, найдется такая функция $h \in St(Q)$, для которой $f \leqslant h$. Обозначим через $S(f)$ множество $\{^\bullet g : g \in St(Q),\ 0 \leqslant g \leqslant f\}$. Это множество сечений ограничено сверху сечением $^\bullet h$, а снизу — нулевым сечением. Следовательно, $C(Q, {}^Q\mathbb{V}) \models \big(S(f){\uparrow} \subset [0, {}^\bullet h]\big)$. Пусть $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ — такое сечение, что $u = \sup\big(S(f){\uparrow}\big)$ внутри $C(Q, {}^Q\mathbb{V})$. Установим равенство $^\circ u = f$.

Предположим сначала, что $^\circ u(q) < f(q)$ для некоторой точки $q \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(^\circ u)$. Обозначим $\big(f(q) + {}^\circ u(q)\big)/2$ через x. Так как функции f и $^\circ u$ непрерывны, найдется такое множество $P \in \mathrm{Clop}(q)$, что $^\circ u(p) < x < f(p)$ для всех $p \in P$. Определим сечение v следующим образом: $v(p) = x^\wedge(p)$ при $p \in P$ и $v(p) = {}^p 0$ в противном случае. Ясно, что $v \in S(f)$ и тем самым $u \geqslant v$. С другой стороны, $\|u < v\| \neq \varnothing$, поскольку $P \subset \|u < v\|$.

Итак, $f \leqslant {}^\circ u$. Предположим теперь, что найдется точка $p \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(^\circ u)$ для которой верно $^\circ u(p) > f(p)$. Пусть $x = (^\circ u(p) + f(p))/2$.

Найдется такое множество $P \in \mathrm{Clop}(p)$, что ${}^{\circ}u(q) > x > f(q)$ для всех точек $q \in P$. Определим сечение u' следующим образом: $u'(q) = x^{\wedge}(q)$ при $q \in P$ и $u'(q) = u(q)$ при $q \notin P$. Тогда $u' \geqslant v$ для всех $v \in S(f)$, и, следовательно, $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V}) \models u' \geqslant \sup\big(S(f)\!\uparrow\big) = u$. С другой стороны, $u' < u$.

Таким образом, функции ${}^{\circ}u$ и f совпадают на всюду плотном множестве, а значит, ${}^{\circ}u = f$. □

Теорема 4.1.6. *(1) Функция $u \mapsto {}^{\circ}u$ осуществляет изоморфизм векторной решетки $\mathcal{R}\!\downarrow$ на расширенное K-пространство $C_{\infty}(Q)$.*

(2) Функция $u \mapsto {}^{\circ}u$ осуществляет изоморфизм векторной решетки $\mathcal{O}(\mathcal{R}\!\downarrow)$ на K-пространство $C(Q)$.

Доказательство. Из предложений 4.1.2 и 4.1.5 следует, что функция $u \mapsto {}^{\circ}u$ осуществляет биекцию между $\mathcal{R}\!\downarrow$ и $C_{\infty}(Q)$; леммы 4.1.3 и 4.1.4 гарантируют, что функция $u \mapsto {}^{\circ}u$ и обратная к ней сохраняют операции векторного пространства и отношение порядка. Кроме того, из лемм 4.1.1 и 4.1.4 следует, что ограниченные сечения соответствуют ограниченным функциям. □

Следствие 4.1.7. *Для любого булевозначного универсума верны следующие утверждения.*

(1) Векторная решетка $\mathcal{R}\!\downarrow$ является расширенным K-пространством.

(2) Векторная решетка $\mathcal{O}(\mathcal{R}\!\downarrow)$ является K-пространством.

Первая часть этого утверждения представляет собой известную теорему Гордона [7].

Функцию, обратную к $u \mapsto {}^{\circ}u$, действующую из $C_{\infty}(Q)$ на $\mathcal{R}\!\downarrow$, обозначим через $f \mapsto {}^{\bullet}f$.

4.2 Описание свойств K-пространств в терминах внешних сечений

В данном параграфе вводится понятие внешнего сечения, представляющего собой расслоение на компактом Q, слоями которого являются подмножества множеств ${}^q\mathbb{R}$. В терминах внешних сечений описаны такие свойства векторных решеток как наличие сильной и слабой порядковых единиц, быть идеалом, фундаментом или полосой соответствующего расширенного K-пространства.

Пусть $D \in \mathrm{Clop}(Q)$. Функцию $s : D \to \mathbb{V}$ назовем *внешним сечением*, если $s(q) \subset {}^q\mathbb{V}$ для любой точки $q \in D$. Внешнее сечение $s : Q \to \mathbb{V}$ назовем *внешним подмножеством* $\mathcal{R}$, если $s(q) \subset {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ для всех $q \in Q$.

Пусть $s : D \to \mathbb{V}$ — внешнее сечение. Символом $s{\downarrow}$ обозначим множество $\{u \in C(D, \mathbb{V}^Q) : u(q) \in s(q)$ для всех $q \in D\}$. Ясно, что если s — внешнее подмножество $\mathcal{R}$, то $s{\downarrow} \subset \mathcal{R}{\downarrow}$.

Внешнее сечение s будем называть *непрерывным в точке* $q \in \mathrm{dom}\, s$, если для любого элемента $x \in s(q)$ найдутся множество $P \in \mathrm{Clop}(q)$ и сечение $u \in s|_P{\downarrow}$ такие, что $u(q) = x$. Внешнее подмножество $\mathcal{R}$ будем называть *непрерывным*, если оно непрерывно во всех точках компакта Q. Множество внешних подмножеств $\mathcal{R}$ условимся обозначать символом $S_\sim(\mathcal{R})$, а множество непрерывных внешних подмножеств $\mathcal{R}$ — символом $C_\sim(\mathcal{R})$. Кроме того, обозначим через $S(\mathcal{R})$ множество всех внешних подмножеств $\mathcal{R}$, непустых в каждой точке компакта Q, а символом $C(\mathcal{R})$ — множество $C_\sim(\mathcal{R}) \cap S(\mathcal{R})$.

Лемма 4.2.1. *Внешнее подмножество $s \in S(\mathcal{R})$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любых $q \in Q$ и $x \in s(q)$ найдется сечение $u \in s{\downarrow}$ такое, что $u(q) = x$.*

Доказательство. Пусть s непрерывно, $q \in Q$ и $x \in s(q)$. Положим $x_q = x$ и для каждой точки $p \in Q \backslash \{q\}$ выберем произвольный элемент $x_p \in s(p)$.

Для каждой точки $p \in Q$ найдутся множество $P_p \in \mathrm{Clop}(p)$ и сечение $u_p \in s|_{P_p}{\downarrow}$ такие, что $u_p(p) = x_p$. Множество $\{P_p : p \in Q\}$ представляет собой открытое покрытие компакта Q. Из этого покрытия выберем конечное подпокрытие $\{P_{p_1}, \dots, P_{p_n}\}$, которое, уменьшив при необходимости его элементы, превратим в разбиение единицы $\{P'_{p_1}, \dots, P'_{p_n}\}$ в алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$. Определим сечение $v \in \mathcal{R}{\downarrow}$ следующим образом: $v(p) = u_{p_i}(p)$ для $p \in P'_{p_i}$, $i = 1, \dots, n$. Ясно, что $v \in s{\downarrow}$ и $v(q) = x$.

Обратное утверждение очевидно. $\square$

Для произвольного $s \in C(\mathcal{R})$ положим $s{\Downarrow} = \{{}^{\circ}u : u \in s{\downarrow}\}$. Заметим, что $s{\Downarrow} \subset C_\infty(Q)$ по теореме 4.1.6.

Для $s \in C(\mathcal{R})$ обозначим множество $\big\{q \in Q : s(q) = \{{}^{q}0\}\big\}$ символом $\{s = 0\}$, а его дополнение — символом $\{s \neq 0\}$. Аналогично обозначим через $\{s \subset o\}$ множество $\{q \in Q : s(q) \subset o({}^{q}\mathbb{R})\}$, а его дополнение — через $\{s \not\subset o\}$. Заметим, что

$$\{s \neq 0\} = \{q \in Q : u(q) \neq {}^{q}0 \text{ для некоторого } u \in s{\downarrow}\},$$
$$\{s \not\subset o\} = \{q \in Q : {}^{\circ}u(q) \neq 0 \text{ для некоторого } u \in s{\downarrow}\}.$$

Лемма 4.2.2. *Для любого $s \in C(\mathcal{R})$ множество $\{s \neq 0\}$ открыто.*

Доказательство. Пусть $q \in \{s \neq 0\}$. Рассмотрим сечение $u \in s{\downarrow}$, для которого $u(q) \neq {}^{q}0$. Тогда открытая окрестность $\|u \neq 0^{\wedge}\|$ точки q является подмножеством $\{s \neq 0\}$. $\square$

Лемма 4.2.3. *Для любого $s \in C(\mathcal{R})$ множество $\{s \not\subset o\}$ открыто и всюду плотно в $\{s \neq 0\}$.*

Доказательство. Сначала покажем, что множество $\{s \not\subset o\}$ открыто. Пусть $q \in \{s \not\subset o\}$. Рассмотрим сечение $u \in s{\downarrow}$, для которого ${}^{\circ}u(q) \neq 0$ и число $\varepsilon \in \mathbb{R}$ такое, что $|u(q)| > {}^{q}\varepsilon$. Тогда множество $\||u| > \varepsilon^{\wedge}\|$ является открытой окрестностью точки q, содержащейся в $\{s \not\subset o\}$.

Далее, покажем, что множество $\{s \not\subset o\}$ всюду плотно в $\{s \neq 0\}$. Пусть это не верно, т.е. существует непустое открытое множество $P \subset \{s \neq 0\} \setminus \{s \not\subset o\}$. Любое сечение $u \in s{\downarrow}$ принимает на множестве P только бесконечно малые значения. Используя предложение 4.1.2 и лемму 4.1.4, легко установить, что для любого сечения $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ множество $W = \{q \in Q : u(q) \neq 0 \text{ и } {}^\circ u(q) = 0\}$ замкнуто и нигде не плотно в Q. С другой стороны, для некоторой (и даже для любой) точки $q \in P$ найдется сечение $u \in s{\downarrow}$ такое, что $u(q) \neq 0$. Тогда непустое открытое множество $\{p \in P : u(p) \neq 0\}$ содержится в W, что невозможно. $\square$

Множество сечений $U \subset C(Q, {}^Q\mathbb{V})$ назовем *конечно-циклическим*, если оно замкнуто относительно конечных перемешиваний.

Предложение 4.2.4. *Пусть $U \subset C(Q, {}^Q\mathbb{V})$ — конечно-циклическое множество сечений, $u_1, \ldots, u_k \in C(Q, {}^Q\mathbb{V})$, P — непустое замкнутое подмножество Q и $\varphi(t, t_1, \ldots, t_k)$ — произвольная формула теории множеств. Если верно утверждение*

$$\forall p \in P \ \exists u \in U \ {}^p\mathbb{V} \models \varphi\big(u(p), u_1(p), \ldots, u_k(p)\big),$$

то

$$\exists u \in U \ \forall p \in P \ {}^p\mathbb{V} \models \varphi\big(u(p), u_1(p), \ldots, u_k(p)\big).$$

Доказательство. Для каждой точки $p \in P$ обозначим символом u_p произвольный элемент U, для которого ${}^p\mathbb{V} \models \varphi\big(u_p(p), u_1(p), \ldots, u_k(p)\big)$. Множество

$$\big\{Q_p = \|\varphi\big(u_p, u_1, \ldots, u_k\big)\| : p \in P\big\}$$

является открыто-замкнутым покрытием компакта P. Выберем из него конечное подпокрытие $Q_{p_1}, \ldots, Q_{p_n}$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $v_i = u_{p_i}$, $i = 1, \ldots, n$. По принципу исчерпывания найдется такое дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие $Q'_1, \ldots, Q'_n$ компакта P, что $Q'_i \subset Q_{p_i}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Положим $Q'_0 = Q \setminus \bigcup_{i=1}^n Q'_i$ и возьмем произвольное сечение $v_0 \in U$. Обозначим через u перемешивание сечений v_i с весами Q'_i, $i = 0, \ldots, n$. Так как множество U конечно-циклическое, сечение u принадлежит U и является искомым. $\square$

Следствие 4.2.5. *Пусть $E \subset C_\infty(Q)$ — конечно-циклическое множество функций, $u_1, \ldots, u_k \in C(Q, {}^Q\mathbb{V})$, P — непустое замкнутое подмножество Q и $\varphi(t, t_1, \ldots, t_k)$ — произвольная формула теории множеств. Если верно утверждение*

$$\forall p \in P\ \exists e \in E\ {}^p\mathbb{V} \models \varphi\big({}^\bullet e(p), u_1(p), \ldots, u_k(p)\big),$$

то

$$\exists e \in E\ \forall p \in P\ {}^p\mathbb{V} \models \varphi\big({}^\bullet e(p), u_1(p), \ldots, u_k(p)\big).$$

Теорема 4.2.6. *Множество $E \subset C_\infty(Q)$ является конечно-циклическим тогда и только тогда, когда $E = s{\Downarrow}$ для некоторого $s \in C(\mathcal{R})$.*

Доказательство. Очевидно, для любого $s \in C(\mathcal{R})$ множество $s{\Downarrow}$ является конечно-циклическим.

Пусть теперь множество $E \subset C_\infty(Q)$ является конечно-циклическим. Для каждой точки $q \in Q$ положим $s(q) = \{{}^\bullet e(q) : e \in E\}$. Очевидно, что $s \in C(\mathcal{R})$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
s{\downarrow} &= \{u \in \mathcal{R}{\downarrow} : \forall q \in Q\ u(q) \in s(q)\} \\
&= \{u \in \mathcal{R}{\downarrow} : \forall q \in Q\ \exists e \in E\ u(q) = {}^\bullet e(q)\} \\
&= \{u \in \mathcal{R}{\downarrow} : \exists e \in E\ \forall q \in Q\ u(q) = {}^\bullet e(q)\} \quad \text{(по следствию 4.2.5)} \\
&= \{u \in \mathcal{R}{\downarrow} : \exists e \in E\ u = {}^\bullet e\} \\
&= \{{}^\bullet e : e \in E\},
\end{aligned}$$

т.е. $s{\Downarrow} = E$. $\square$

Ясно, что для любого конечно-циклического множества $E \subset C_\infty(Q)$ непрерывное внешнее подмножество $s \in C(\mathcal{R})$, фигурирующее в формулировке теоремы 4.2.6, единственно. Условимся обозначать это внешнее подмножество символом $E\Uparrow$. Очевидно, для любого конечно-циклического множества $E \subset C_\infty(Q)$ имеет место равенство $E = E{\Uparrow}{\Downarrow}$.

Следующее утверждение является прямым следствием лемм 4.1.4 и 4.2.1.

Предложение 4.2.7. *Для конечно-циклических подмножеств E_1 и E_2 пространства $C_\infty(Q)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(а) $E_1 \subset E_2$;

(б) $E_1{\Uparrow}(q) \subset E_2{\Uparrow}(q)$ *для всех* $q \in Q$;

(в) $E_1{\Uparrow}{\downarrow} \subset E_2{\Uparrow}{\downarrow}$.

Напомним, что для произвольной точки $q \in Q$ множество ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ является (вообще говоря, неархимедовой) векторной решеткой.

Лемма 4.2.8. *Пусть $q \in Q$ и $I \subset {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ — идеал ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Тогда либо $I \subset o({}^q\mathbb{R})$, либо $\mathcal{O}({}^q\mathbb{R}) \subset I$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что если идеал ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ содержит не бесконечно малое число, то он содержит все ограниченные числа. □

Теорема 4.2.9. *Конечно-циклическое множество $E \subset C_\infty(Q)$ является идеалом $C_\infty(Q)$ в том и только том случае, когда для любой точки $q \in Q$ множество $E{\Uparrow}(q)$ является идеалом ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$.*

Доказательство. Положим $s = E\Uparrow$.

Если E — идеал $C_\infty(Q)$, то по теореме 4.1.6 множество $s{\downarrow}$ является идеалом $\mathcal{R}{\downarrow}$. Докажем, что в этом случае $s(q)$ — идеал ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ для любой точки $q \in Q$. Согласно лемме 4.2.1 для произвольных элементов

$x, y \in s(q)$ найдутся сечения $u, v \in s{\downarrow}$ такие, что $u(q) = x$, $v(q) = y$. Для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сечение $\alpha u + \beta v$ принадлежит $s{\downarrow}$, и, следовательно, $\alpha x + \beta y \in s(q)$. Таким образом, $s(q)$ — векторное подпространство ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Аналогично устанавливается, что $s(q)$ является также и векторной подрешеткой ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Далее, пусть $x \in s(q)$, $y \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ и $|y| \leqslant |x|$. Существуют сечения $u \in s{\downarrow}$ и $v \in \mathcal{R}{\downarrow}$, для которых $u(q) = x$ и $v(q) = y$. Ясно, что сечение $w = |u| \wedge |v|$ принадлежит $s{\downarrow}$, а значит, $y \in s(q)$, так как $|y| = w(q)$. Итак, $s(q)$ — идеал ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$.

Теперь докажем обратное утверждение. Для произвольных сечений $u, v \in s{\downarrow}$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $(\alpha u + \beta v)(q) = \alpha u(q) + \beta v(q) \in s(q)$, для всех $q \in Q$, а значит, $\alpha u + \beta v \in s{\downarrow}$. Аналогичным образом если $u \in s{\downarrow}$, $v \in \mathcal{R}{\downarrow}$ и $|v| \leqslant |u|$, то $v \in s{\downarrow}$. Таким образом, $s{\downarrow}$ — идеал $\mathcal{R}{\downarrow}$, а следовательно, E — идеал $C_\infty(Q)$. □

Заметим, что любой идеал векторной решетки является конечно-циклическим множеством.

Теорема 4.2.10. *Идеал $E \subset C_\infty(Q)$ является фундаментом $C_\infty(Q)$ в том и только том случае, когда множество $\{E{\Uparrow} \neq 0\}$ всюду плотно в Q.*

Доказательство. Положим $s = E{\Uparrow}$. Пусть множество $\{s \neq 0\}$ всюду плотно в Q. Возьмем произвольное ненулевое сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$. Множество $\|u \neq 0\|$ непусто, а значит, непусто и множество $\{q \in Q : u(q) \neq 0^\wedge\} \cap \{s \neq 0\}$. Следовательно, $u \notin s{\downarrow}^\perp$. Таким образом, $s{\downarrow}^\perp = \{0\}$, откуда вытекает, что $s{\downarrow}$ — фундамент $\mathcal{R}{\downarrow}$. (Множество $s{\downarrow}$ является идеалом $\mathcal{R}{\downarrow}$ по теореме 4.1.6.)

Обратное утверждение очевидно. □

Следствие 4.2.11. *Конечно-циклическое множество $E \subset C_\infty(Q)$ является фундаментом $C_\infty(Q)$ в том и только том случае, когда для* *любой точки $q \in Q$ множество $E{\Uparrow}(q)$ является идеалом ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ и множество $\{E{\Uparrow} \neq 0\}$ всюду плотно в Q.*

Теорема 4.2.12. *Пусть E — конечно-циклическая векторная подрешетка $C_\infty(Q)$. В E есть слабая порядковая единица тогда и только тогда, когда множество $\{E{\Uparrow} \neq 0\}$ замкнуто (а значит, открыто-замкнуто согласно лемме 4.2.2).*

Доказательство. Положим $s = E{\Uparrow}$.

Пусть в $s{\downarrow}$ есть слабая порядковая единица u. Очевидно, $\|u \neq 0\| \subset \{s \neq 0\}$. Для доказательства замкнутости множества $\{s \neq 0\}$ достаточно установить равенство $\|u \neq 0\| = \{s \neq 0\}$. Предположим вопреки доказываемому, что разность $\{s \neq 0\} \setminus \|u \neq 0\|$ содержит некоторую точку q. Тогда найдется сечение $v \in s{\downarrow}$, для которого $v(q) \neq 0$ и $\|v \neq 0\| \cap \|u \neq 0\| = \varnothing$. Последнее противоречит тому, что u является слабой порядковой единицей $s{\downarrow}$.

Обратно, пусть множество $\{s \neq 0\}$ замкнуто. Для любой точки $q \in \{s \neq 0\}$ найдется сечение $u_q \in s{\downarrow}$ такое, что $u(q) \neq 0$. По предложению 4.2.4 существует сечение $u \in s{\downarrow}$ удовлетворяющее неравенству $u(q) \neq 0$ для всех $q \in \{s \neq 0\}$. Ясно, что сечение u является в $s{\downarrow}$ слабой порядковой единицей. $\square$

Лемма 4.2.13. *Пусть $s \in C(\mathcal{R})$. Сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ принадлежит $s{\downarrow}^{\perp\perp}$ тогда и только тогда, когда $\|u \neq 0\| \subset \mathrm{cl}\{s \neq 0\}$.*

Доказательство. Пусть $u \in s{\downarrow}^{\perp\perp}$. Если $u(q) \neq 0$ для некоторой точки $q \in Q \setminus \mathrm{cl}\{s \neq 0\}$, то найдется множество $P \in \mathrm{Clop}(q)$ такое, что $P \subset \{s = 0\} \cap \|u \neq 0\|$. Тогда $P \subset \|v = 0\|$ для любого сечения $v \in s{\downarrow}$. Следовательно, $P \subset \|v = 0\|$ для всех $v \in s{\downarrow}^{\perp\perp}$, а значит, $u(q) = 0$. Противоречие.

Пусть теперь $\|u \neq 0\| \subset \mathrm{cl}\{s \neq 0\}$. Рассмотрим произвольное сечение $v \in s{\downarrow}^{\perp}$. Предположим вопреки доказываемому, что множество $P = \|u \neq$

$0\| \cap \|v \neq 0\|$ не пусто. Очевидно, $P \in \mathrm{Clop}(Q)$. Кроме того, $P \subset \{s = 0\}$ и $P \subset \mathrm{cl}\{s \neq 0\}$. Противоречие. □

Теорема 4.2.14. *Идеал E пространства $C_\infty(Q)$ является его полосой тогда и только тогда, когда множество $\{E{\Uparrow} \neq 0\}$ замкнуто и для каждой точки $q \in Q$ верно $E{\Uparrow}(q) = \{{}^q0\}$ или $E{\Uparrow}(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$.*

Доказательство. Положим $s = E{\Uparrow}$.

Пусть $s{\downarrow}$ — полоса $\mathcal{R}{\downarrow}$. Зафиксируем произвольную точку $q \in \{s \neq 0\}$ и покажем, что $s(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Найдется сечение $u \in s{\downarrow}$ такое, что $u(q) \neq 0$. Пусть y — произвольный элемент ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ и $v \in \mathcal{R}{\downarrow}$ — такое сечение, что $v(q) = y$. Определим сечение $w \in \mathcal{R}{\downarrow}$ следующим образом: $w(p) = v(p)$ при $p \in \|u \neq 0\|$ и $w(p) = 0$ в противном случае. Ясно, что $w \in s{\downarrow}^{\perp\perp} = s{\downarrow}$ и $w(q) = y \in s(q)$. Таким образом, $s(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Замкнутость множества $\{s \neq 0\}$ вытекает из теоремы 4.2.12.

Обратно, пусть $s(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ для всех $q \in \{s \neq 0\}$ и множество $\{s \neq 0\}$ замкнуто. Покажем, что $s{\downarrow}^{\perp\perp} \subset s{\downarrow}$. Пусть $u \in s{\downarrow}^{\perp\perp}$ и $q \in Q$. Если $u(q) = {}^q0$, то, очевидно, $u(q) \in s(q)$. Если же $u(q) \neq {}^q0$, то $s(q) \neq \{{}^q0\}$ согласно лемме 4.2.13, а значит, $s(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow} \ni u(q)$. □

Предложение 4.2.15. *Если идеал E пространства $C_\infty(Q)$ имеет сильную порядковую единицу, то множество $\{E{\Uparrow} \neq 0\}$ замкнуто и $E{\Uparrow}(q)$ является главным идеалом ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ для всех $q \in Q$.*

Доказательство. Положим $s = E{\Uparrow}$. Пусть $u \in s{\downarrow}$ — сильная порядковая единица пространства $s{\downarrow}$. Поскольку u является также и слабой порядковой единицей $s{\downarrow}$, множество $\{s \neq 0\}$ замкнуто в силу теоремы 4.2.12. Осталось заметить, что для каждой точки $q \in Q$ множество $s(q)$ является главным идеалом ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$, порожденным $u(q)$. □

Из приведенной ниже теоремы 4.3.3 вытекает, что обратное утверждение не верно.

Предложение 4.2.16. *Пусть E — идеал $C_\infty(Q)$. Элемент $e \in E$ является сильной порядковой единицей в E тогда и только тогда, когда ${}^\bullet e$ является поточечной сильной порядковой единицей в $E{\Uparrow}{\downarrow}$, т.е. ${}^\bullet e(q)$ — сильная порядковая единица в $E{\Uparrow}(q)$ для всех $q \in Q$.*

Доказательство. Положим $s = E{\Uparrow}$. Очевидно, сильная порядковая единица в $s{\downarrow}$ является также и поточечной сильной порядковой единицей.

Покажем обратное. Пусть $u \in s{\downarrow}$ — поточечная сильная порядковая единица. Для произвольного сечения $v \in s{\downarrow}$ и любой точки $q \in Q$ найдется число $n_q \in \mathbb{N}$, такое, что $|v(q)| \leqslant n_q|u(q)|$. Множество $\big\{\|\,|v| \leqslant n_q|u|\,\| : q \in Q\big\}$ является открытым покрытием компакта Q. Выберем из него конечное подпокрытие $\big\{\|\,|v| \leqslant n_{q_1}|u|\,\|, \dots, \|\,|v| \leqslant n_{q_k}|u|\,\|\big\}$, $k \in \mathbb{N}$, и положим $n = \max\{n_{q_1}, \dots, n_{q_k}\}$. Очевидно, $|v| \leqslant n|u|$. $\square$

4.3 Поточечные критерии

Установленные в предыдущих параграфах результаты позволяют упрощать доказательства многих утверждений о K-пространствах с помощью перехода к их «поточечным» аналогам. Рассмотрим подробнее, в каких случаях это возможно.

Пусть множества $\mathcal{E}$ и Φ — произвольные множества конечно-циклических подмножеств пространства $C_\infty(Q)$. Будем говорить, что *на множестве $\mathcal{E}$ есть поточечный критерий принадлежности множеству* Φ, если найдется семейство множеств $\varphi_q \subset \mathcal{P}({}^q\mathbb{R}{\downarrow})$, $q \in Q$, удовлетворяющее следующему условию:

$$\forall E \in \mathcal{E}\ \big(E \in \Phi \Leftrightarrow\ \forall q \in Q\ E{\Uparrow}(q) \in \varphi_q\big). \qquad (2)$$

Условие 2 будем называть *поточечным критерием принадлежности* Φ, а семейство $(\varphi_q)_{q\in Q}$ — *реализацией* этого критерия.

Замечание 4.3.1. *Пусть множества $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_0$ и Φ — некоторые множества конечно-циклических подмножеств пространства $C_\infty(Q)$, причем $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$. Тогда если на множестве $\mathcal{E}$ есть поточечный критерий принадлежности Φ, то тот же критерий будет и поточечным критерием принадлежности Φ на множестве $\mathcal{E}_0$.*

Лемма 4.3.2. *Не существует последовательности $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ открыто-замкнутых подмножеств Q такой, что в пересечении $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$ есть ровно одна не σ-изолированная точка.*

Доказательство. Пусть есть такая последовательность $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, и пусть q — единственная не σ-изолированная точка множества $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Тогда имеется строго убывающая последовательность открыто-замкнутых множеств $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \{q\}$ и $W_n \subset P_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Далее, найдется функция $f \in C(Q)$ такая, что $f|_{W_{2k}\setminus W_{2k-1}} = 0$ и $f|_{W_{2k+1}\setminus W_{2k}} = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Как легко видеть, $q \in \mathrm{cl}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(W_{2k}\setminus W_{2k-1})$ и $q \in \mathrm{cl}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(W_{2k+1}\setminus W_{2k})$, что противоречит существованию предела функции f в точке q. $\square$

Теорема 4.3.3. *Пусть экстремально несвязный компакт Q бесконечен. Тогда на множестве фундаментов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия существования сильной порядковой единицы.*

Доказательство. Допустим, что на множестве фундаментов $C_\infty(Q)$ есть поточечный критерий существования сильной порядковой единицы, и $(\varphi_q)_{q\in Q}$ — его реализация, т.е. для произвольного фундамента $E \subset C_\infty(Q)$ в E есть сильная порядковая единица тогда и только тогда, когда $E{\Uparrow}(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$.

Определим $s_1 \in C(\mathcal{R})$, полагая $s_1(q) = \mathcal{O}({}^q\mathbb{R})$, $q \in Q$. Тогда $s_1{\Downarrow} = C(Q)$ — фундамент $C_\infty(Q)$, имеющий сильную порядковую единицу. Нетрудно проверить, что из бесконечности компакта Q следует существование в нем по крайней мере одной не σ-изолированной точки q_0. По предположению $\mathcal{O}({}^{q_0}\mathbb{R}) \in \varphi_{q_0}$.

Пусть $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ — ненулевое в каждой точке сечение такое, что $u(q_0)$ — бесконечно большое число. Для каждой точки $q \in Q$ положим внешнее сечение s_2 в точке q равным главному идеалу ${}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$, порожденному внутренним числом $u(q)$. Ясно, что $s_2 \in C(\mathcal{R})$ и $s_2{\Downarrow}$ — фундамент $C_\infty(Q)$ (см. следствие 4.2.11). По предложению 4.2.16 в $s_2{\Downarrow}$ есть сильная порядковая единица — функция ${}^\circ u$. Следовательно, $s_2(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. Обозначим через P_0 множество тех точек $q \in Q$, в которых внутреннее число $u(q)$ бесконечно большое. По построению $q_0 \in P_0$.

Положим $s(q_0) = s_1(q_0) = \mathcal{O}({}^{q_0}\mathbb{R})$ и $s(q) = s_2(q)$ при $q \neq q_0$. Ясно, что $s \in C(\mathcal{R})$ и $s{\Downarrow}$ — фундамент $C_\infty(Q)$ в силу следствия 4.2.11. По построению $s(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$, а следовательно, в $s{\Downarrow}$ есть сильная порядковая единица f. Для всех $q \in P_0 \backslash \{q_0\}$ внутреннее число ${}^\bullet f(q)$ бесконечно большое. Более того, множество тех точек $q \in Q$, в которых внутреннее число ${}^\bullet f(q)$ бесконечно большое, равно $P_0 \backslash \{q_0\}$. Поскольку ${}^\bullet f(q_0) \in \mathcal{O}({}^{q_0}\mathbb{R})$, найдется число $k \in \mathbb{N}$ такое, что ${}^\bullet f(q_0) < {}^{q_0}k$. Тогда $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\|u > n^\wedge\| \cap \|{}^\bullet f < k^\wedge\|\right) = \{q_0\}$, что противоречит лемме 4.3.2. $\square$

Следующее утверждение вытекает из теоремы 4.3.3 с учетом замечания 4.3.1.

Следствие 4.3.4. *Пусть экстремально несвязный компакт Q бесконечен. Тогда на множестве идеалов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия существования сильной порядковой единицы.*

Теорема 4.3.5. *(a) На множестве фундаментов $C_\infty(Q)$ есть поточечный критерий существования слабой единицы: в фундаменте $E \subset C_\infty(Q)$ есть слабая порядковая единица тогда и только тогда, когда $E{\Uparrow}(q) \neq \{{}^q 0\}$ для всех $q \in Q$ $\big($т.е. поточечный критерий реализуется семейством множеств $\varphi_q = \mathcal{P}({}^q\mathbb{R}{\downarrow}) \backslash \{\{{}^q 0\}\}$, $q \in Q\big)$.*

(б) Если экстремально несвязный компакт Q бесконечен, то на множестве идеалов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия существования слабой порядковой единицы.

Доказательство. (а) Очевидное следствие теорем 4.2.10 и 4.2.12.

(б) Пусть, вопреки доказываемому, упомянутый критерий существует, и $(\varphi_q)_{q\in Q}$ — его реализация. Для каждой точки $q \in Q$ положим $s_1(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ и $s_2(q) = \{{}^q0\}$. Очевидно, $s_1, s_2 \in C(\mathcal{R})$ и $s_1{\Downarrow}, s_2{\Downarrow}$ — идеалы $C_\infty(Q)$, в каждом из которых есть слабая порядковая единица. Следовательно, $s_1(q), s_2(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. Легко проверить, что из бесконечности компакта Q следует существование в нем по крайней мере одной не изолированной точки q_0. Положим $s(q_0) = s_2(q_0)$ и $s(q) = s_1(q)$ при $q \in Q\backslash\{q_0\}$. Поскольку $s(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$, в пространстве $s{\Downarrow}$ есть слабая порядковая единица e. Тогда ${}^\bullet e(q_0) = 0$ и, следовательно, найдется окрестность P точки q_0 такая, что ${}^\bullet e(q) = 0$ для всех $q \in P$. С другой стороны, $P \neq \{q_0\}$, а значит, имеется сечение $v \in s{\downarrow}$, для которого $\|v \neq 0\| \cap P \neq \varnothing$. Противоречие. □

Теорема 4.3.6. *На множестве идеалов $C_\infty(Q)$ есть поточечный критерий принадлежности множеству фундаментов в том и только том случае, когда множество изолированных точек компакта Q всюду плотно в Q. Критерий следующий: идеал $E \subset C_\infty(Q)$ является фундаментом тогда и только тогда, когда $E{\Uparrow}(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$, где $\varphi_q = \{{}^q\mathbb{R}{\downarrow}\}$, если точка q изолирована, и $\varphi_q = \mathcal{P}({}^q\mathbb{R}{\downarrow})$ в противном случае.*

Доказательство. Напомним, что в слоях ${}^q\mathbb{V}$, соответствующих σ-изолированным точкам Q нет нестандартных (в частности, бесконечно больших) внутренних чисел. Таким образом, если точка q σ-изолирована, то в силу леммы 4.2.8 любой идеал векторной решетки ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ либо совпадает с ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$, либо равен $\{{}^q0\}$.

Пусть множество изолированных точек Q всюду плотно в Q. Очевидно, если E — фундамент $C_\infty(Q)$, то для любой изолированной точки $q \in Q$ верно $E{\Uparrow}(q) \neq \{{}^q0\}$, и, следовательно, $E{\Uparrow}(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Обратно, пусть E — идеал $C_\infty(Q)$ и $E{\Uparrow}(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ для каждой изолированной точки $q \in Q$. Поскольку множество изолированных точек всюду плотно в Q, для произвольного ненулевого сечения $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ найдется изолированная точка $q \in \|u \neq 0\|$, а значит существует сечение $v \in E{\Uparrow}{\downarrow}$ такое, что $v(q) \neq 0$ и, следовательно, $v \not\perp u$.

Предположим теперь, что имеется непустое множество $P \in \operatorname{Clop}(Q)$, в котором нет изолированных точек, и на множестве идеалов $C_\infty(Q)$ есть поточечный критерий принадлежности множеству фундаментов $C_\infty(Q)$, реализуемый семейством $(\varphi_q)_{q \in Q}$. Для каждой точки $p \in P$ положим $s_p(p) = \{{}^p0\}$ и $s_p(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ при $q \in Q \backslash \{p\}$. Ясно, что $s_p \in C(\mathcal{R})$ и $s_p{\Downarrow}$ — фундамент $C_\infty(Q)$ для всех $p \in P$. Следовательно, $s_p(p) \in \varphi_p$ для каждой точки $p \in P$. Кроме того, очевидно, ${}^q\mathbb{R}{\downarrow} \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. Положим $s(p) = s_p(p) = \{{}^p0\}$ при $p \in P$ и $s(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ при $q \in Q \backslash P$. Как легко видеть, $s \in C(\mathcal{R})$ и $s{\Downarrow}$ — идеал $C_\infty(Q)$, не являющийся фундаментом. С другой стороны, $s(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. $\square$

Теорема 4.3.7. *Если экстремально несвязный компакт Q бесконечен, то на множестве идеалов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия принадлежности множеству полос $C_\infty(Q)$.*

Доказательство. Предположим, что такой критерий есть и $(\varphi_q)_{q \in Q}$ — его реализация. Очевидно, $\{{}^q0\} \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. Из бесконечности компакта Q следует существование открытого множества $P \subset Q$ такого, что $\operatorname{cl} P \neq P$. Положим $s_1(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ для всех точек $q \in \operatorname{cl} P$ и $s_1(q) = \{{}^q0\}$ в остальных точках. Ясно, что $s_1 \in C(\mathcal{R})$ и по теореме 4.2.14, $s_1{\Downarrow}$ — полоса $C_\infty(Q)$. Следовательно, $s_1(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. Положим $s(q) = s_1(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ при $q \in P$ и $s(q) = \{{}^q0\}$ в остальных точках. Очевидно,

$s \in C(\mathcal{R})$, $\{s \neq 0\} = P \neq \operatorname{cl} P = \operatorname{cl}\{s \neq 0\}$, и по теореме 4.2.14 множество $s{\Downarrow}$ не является полосой пространства $C_\infty(Q)$. С другой стороны, $s(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. $\square$

4.4 Таблица существования поточечных критериев

В заключение, приведем таблицу условий существования поточечных критериев для рассмотренных нами множеств и свойств.

<table>
<tr><td>Множество
Свойство</td><td>Множество конечно-циклических множеств</td><td>Множество идеалов</td><td>Множество фундаментов</td></tr>
<tr><td>Быть идеалом</td><td>Есть критерий (теорема 4.2.9)</td><td colspan="2">Критерий тривиален</td></tr>
<tr><td>Быть фундаментом</td><td colspan="2">Есть критерий тогда и только тогда, когда множество изолированных точек Q всюду плотно в Q (теорема 4.3.6)</td><td>Критерий тривиален</td></tr>
<tr><td>Иметь сильную порядковую единицу</td><td colspan="3">Есть критерий тогда и только тогда, когда компакт Q конечен(теорема 4.3.3, следствие 4.3.4)</td></tr>
<tr><td>Иметь слабую порядковую единицу</td><td colspan="2">Есть критерий тогда и только тогда, когда компакт Q конечен(теорема 4.3.5)</td><td>Есть критерий (теорема 4.3.5)</td></tr>
<tr><td>Быть полосой</td><td colspan="3">Нет критерия (теорема 4.3.7)</td></tr>
</table>

5 Публикации автора по теме диссертации

[1] Гутман А.Е., Рябко Д.Б. Нестандартная оболочка нормированного пространства в булевозначном универсуме // Мат. труды, 2001 — V. 4 №2— С. 42–52

[2] Гутман А.Е., Рябко Д.Б. Критерий полноты нестандартной оболочки нормированного пространства в булевозначном универсуме // Доклады Академии Наук, 2002— V. 384— №2.— С. 153–155.

[3] Гутман А.Е., Рябко Д.Б. Функциональное представление пространств Канторовича в булевозначных моделях. // Владикавказский мат. журнал., 2002. — V. 4 Вып. 1 С. 34–49

[4] Рябко Д.Б. Применение синтеза инфинитезимального и булевозначного анализа в теории нормированных пространств // Тезисы XXIII Конференция молодых ученых мехмата МГУ, 2001, С. 42–52.

[5] Рябко Д.Б. Полнота нестандартной оболочки нормированного пространства в булевозначном универсуме // Материалы XXXVIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», 2000 Изд-во Новосибирского Гос. Университета, Новосибирск.

[6] Gutman A.E., Ryabko D.B. Nonstandard hull of a normed space in a Boolean valued universe // Siberian Advances in Mathematics, 2002, Vol. №

[7] Gutman A., Riabko D. Functional representation of a Dedekind-complete Reisz space in a Boolean valued universe. // Proceedings of 4th Conference on Function Spaces at SIUE, USA, 2002 http://www.siue.edu/MATH/conference/info-pack/Abstracts.pdf

Список литературы

[1] Акилов Г.П., Кутателадзе С.С. Упорядоченные векторные пространства.— Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.

[2] Альбеверио С., Фейнстад Й., Хёэг-Крон Р., Линдстрём Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.— М.: Мир, 1990.

[3] Архангельский А.В., Пономарёв В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.— М.: Наука, 1974.

[4] Бурбаки Н. Общая топология.— М.: Наука, 1968.

[5] Владимиров Д.А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.— 318 с.

[6] Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. — М.: Физматгиз 1961.—408 с.

[7] Гордон Е.И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства. // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 237, №4.— С. 773-775

[8] Гордон Е.И. K-пространства в булевозначных моделях теории множеств. // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 258, №4.— С. 777-780

[9] Гордон Е.И., Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Инфинитезимальный анализ. часть I. Новосибирск, 2001. Изд-во Института математики.

[10] Гутман А.Е. Линейные операторы, согласованные с порядком // Труды института математики, 1995 — V. 29— P. 63–211

[11] Гутман А.Е., Емельянов Э.Ю., Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Нестандартный анализ и векторные решетки. Новосибирск, Изд-во Института математики, 1999.

[12] Гутман А.Е., Лосенков Г.А. Функциональное представление булевозначного универсума // Математические труды, 1998 Т. 1 №1 С. 54–77

[13] Емельянов Э.Ю. Порядковые и регулярные оболочки векторных решеток // Сиб. мат. журн.— 1994. Т. 35 №6.— С 1243-1252

[14] Емельянов Э.Ю. Инфинитезимальный подход к представлению векторных решеток пространствами непрерывных функций на компакте // Докл. РАН.— 1995.— Т. 344, №1/— С. 9-11

[15] Емельянов Э.Ю. Инвариантные гомоморфизмы нестандартных расширений булевых алгебр и векторных решеток // Сиб. мат. журн. —1997. — Т.38 №2 С. 286-296.

[16] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1984.— 752 с.

[17] Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. —М.-Л.: Гостехиздат, 1950.— 548 с.

[18] Кусраев А.Г. Числовые системы в булевозначных моделях теории множеств // VIII Всесоюз. конф. по мат. логике.— М.: 1986.— С. 99

[19] Кусраев А.Г. Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1985.— 256 с.

[20] Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Булевозначный анализ.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999.

[21] Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Нерешенные нестандартные задачи.— Новосибирск, 2000. Препринт/ Изд-во Института математики.

[22] Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Нестандартные методы анализа.— Новосибирск, 1990, Наука, Новосибирское отд-ние.

[23] Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журнал- 1990.— Т.31 №5. — С. 111-119

[24] Кусраев А.Г., Малюгин С.А. Некоторые вопросы теории векторных мер. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.— 190 с.

[25] Кутателадзе С.С. Циклические монады и их применение // Сиб. мат. журн. 1986.— Т.27.— №1 С. 100-110.

[26] Кутателадзе С.С. Монады проультрафильтров и экстенсиональных фильтров // Сиб. мат. журн. 1989.— Т.30, №1. —С. 129-133.

[27] Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа.— Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2000.— 336 с.

[28] Сикорский Р. Булевы алгебры.— М.: Мир— 1969

[29] Любецкий В.А., Гордон Е.И. Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.— М.: Наука, 1983 —С. 82-153.

[30] Aliprantis C.D. and Burkinsaw O. Positive operators. —New York: Academic Press, 1985.— 367 pp.

[31] Bell J. L. Boolean-Valued models and Independence Proofs in Set Theory.— New York etc.:Clarendon Press, 1985.— xx+165 pp.

[32] Cozart D. and Moore L.C. The nonstandard hull of a normed Riesz space // Duke Math. J. — 1974.—No. 41 P. 263-375

[33] Cutland N. Nonstandard measure theory and its applications // Proc. London Math. Soc. — 1983. V.15, No. 6. — P. 530–589.

[34] Halmos P.R. Lectures on Boolean Algebras.— Toronto, New York and Lo ndon: Van Nostrand, 1963.— 147 pp.

[35] Heinrich S. Ultraproducts in Banach Space theory // J. Reine Angem. Math.— 1980. — V. 313. — P. 72–104

[36] Henson C.W. Infinitesimals in functional analysis // Nonstandard analysis and its applications.— Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1988. — P. 140–181

[37] Henson C.W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard hulls of the classical Banach spaces // Duke Math. J. — 1974. — V. 41. No.2. — P. 277–284

[38] Hrbacek K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math.—1978.—V. 98,№1.—P.1-24.

[39] Hurd A.E., Loeb P.A. An introduction to nonstandard real analysis.— 1985.— Orlando etc.: Academic Press, Inc.

[40] Jech T.J. Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.— 1985. V. 289. —No. 1.— P. 133-162

[41] Jech T.J. Boolean-linear spaces // Adv. in Math. 1990. V. 81. —No. 2.— P. 117–197

[42] Johnstone P.T. Stone Spaces.— Cambridge and New York: Camprige University Press, 1982. —xxii+370 pp.

[43] Monk J.D. and Bonnet R. (eds.), Handbook of Boolean Algebras. Vol. 1–3.— Amsterdam etc.: North-Holland, 1989

[44] Kawai T. Axiom systems of nonstandard set theory // Logic Symposia, Hakone 1979, 1980.—Berlin etc.: Spriger-Verlag, 1981.—P. 57–65

[45] Kusraev A.G. and Kutateladze S.S. Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. Math.— 1992.— V.2, No. 2. — P. 114–152

[46] Luxemburg W.A.J. and Zaanen A.C. Riesz Spaces. Vol 1.— Amsterdam and London: North-Holland, 1971.— 514 pp.

[47] Luxemburg W. A. J. A general theory of monads // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.— New York: Holt, Rinehart and Minston.— P. 18–86.

[48] Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.—1977.—V. 83,№6.—P.1165-1198

[49] Nelson E. The syntax of nonstandard analysis // Ann. Pure Appl. Logic.— 1998.— V. 38,№2. P. 123–134.

[50] Ogasawara T. Theory of vector lattices // J. Sci. Hirosima Univ., Ser. A. 1942— Vol. 12 — P. 37–100

[51] Ozawa M. A Boolean valued interpretation of Hilbert space theory // J. Math. Soc. Japan.— 1983.— V. 35, No. 4. — P. 609–627

[52] Ozawa M. A classification of type I AW^*-algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.— 1984.— V. 36, No. 4. — P. 141–148

[53] Robinson A. Non-Standard Analysis, Proc. Koninkl. ned. akad. wet. A, 1961,— V. 64, P. 432-440

[54] Robinson A. Non-Standard Analysis.— Princeton: Princeton University Press, 1966.

[55] Rosser J. B. Simplified independence proofs: Boolean valued models of set theory. —New York : Academic , 1969— 217 pp

[56] Schaefer H.H. Banach Lattices and Positive Operators.— Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.

[57] Schwarz H.-U. Banach Lattices and Operators.— Leipzing: Teubner, 1984. —208 pp.

[58] Stone M.H. Application of theory of Boolean rings to general topology// Trans. Amer. Math. Soc. 1937 — Vol. 41— P. 309–375

[59] Solovay R.M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. Math.— 1970.— V. 92, №2. — P.1–56.

[60] Takeuti G. and Zaring W.M. Axiomatic set theory.— New York: Springer-Verlag, 1973.— 238 pp.